

Artigo Original

Recebido em 10/04/2006 e aceito em 27/12/2006

Cálculo do campo elétrico em materiais biológicos usando a técnica das fontes imaginárias

Electrical field distribution within biological materials using the image source technique

Pedro Bertemes Filho

Universidade do Estado de Santa Catarina
UDESC-CCT, Campus Universitário
Prof. Avelino Marcante, s/n, Bom Retiro
89223-100 Joinville, SC, Brasil
e-mail: dee2pbf@joinville.udesc.br

Resumo

Uma nova técnica de caracterização de materiais biológicos, chamada Espectroscopia de Impedância Elétrica (EIE), vem sendo bastante utilizada na caracterização de tecidos cancerígenos, como por exemplo, o câncer de colo de útero, de esôfago/estômago e de bexiga. A técnica EIE utiliza uma sonda tetrapolar de eletrodos para fazer as medições na superfície do tecido. A detecção de células cancerígenas em um volume de tecido depende principalmente da sensibilidade da sonda que, por sua vez, depende da disposição dos eletrodos e da distribuição de condutividade elétrica no interior do tecido sob estudo. A investigação da influência destas variáveis no cálculo da sensibilidade de medição da sonda é de vital importância no processo de aperfeiçoamento e construção de um protótipo experimental. Este trabalho apresenta uma solução numérica simplificada para o cálculo da distribuição do campo elétrico e, conseqüentemente da sensibilidade, em um volume condutor heterogêneo, isotrópico e de espessura finita usando a técnica das Fontes Imaginárias (FI). Primeiramente, a lei de Gauss para a eletricidade foi usada, juntamente com a técnica FI, para calcular a distribuição do campo elétrico neste volume. Foi demonstrado que a solução numérica simplificada usando a técnica FI atende ao princípio da convergência. Os resultados mostraram que o módulo do campo elétrico converge após usar 100 fontes de corrente imaginária, enquanto a densidade de corrente o faz com 10 fontes. Já as investigações da sensibilidade mostraram que tanto as espessuras das camadas como suas condutividades elétricas têm muita influência nos resultados. Quanto maior a condutividade elétrica da primeira camada em relação à segunda, maior será a sensibilidade no interior da segunda camada. Os resultados preliminares obtidos neste trabalho são promissores, por exemplo, para estudar a sensibilidade de uma sonda de eletrodos na detecção de mudanças patológicas internas no tecido, como por exemplo, a detecção de nódulos cancerígenos subcutâneos.

Palavras-chave: Espectroscopia, Campo elétrico, Técnica da imagem, Sensibilidade.

Abstract

A new technique called Electrical Impedance Spectroscopy (EIS) is been widely used for characterizing tissues and to discriminate normal tissue from cancerous one, as for example, cervical, esophagus/stomach and bladder cancer. This is a non-invasive technique, which uses a tetrapolar electrode probe to make measurements on the tissue surface. The detection of cancerous cells within the volume conductor depends mainly on the sensitivity of the probe, which, in turns, depends on the electrode array and on the conductivity distribution within this volume. If the objective is to build an optimized prototype, then a numerical solution for the sensitivity distribution has to be investigated. This paper develops an adapted numerical solution for both electrical field and sensitivity

distribution within a heterogeneous semi-infinite isotropic medium of finite thickness by using the Image Sources (IS) technique together with the Gauss's law for electricity. It was shown that the adapted numerical solution agrees with the divergence theorem. The results showed that the modulus of the electrical field converges after using 100 current image sources but after 10 ones for the case of the current density. It was also showed that the mean sensitivity over a layer depends on its thickness and conductivity. The preliminary results showed that it should be possible to improve a tetrapolar probe for detecting pathological changes in tissue, as for example in skin cancer.

Keywords: Spectroscopy, Electrical field, Image technique, Sensitivity.

Extended Abstract

Introduction

The Electrical Impedance Spectroscopy involves driving electrical currents through electrodes into the body, measurement of the resulting potentials by other electrodes and then calculation of the transfer impedance. Different tissues may have distinguishing characteristics in the shape of the impedance spectrum. The most common way of measuring tissue impedance is the tetrapolar or 4-electrode technique, which is designed to minimize the effect of electrode impedance. Particularly, the detection of cancerous cells within the volume conductor depends mainly on the sensitivity of the 4-electrode technique, which, in turns, depends on the electrode array and on the conductivity distribution within this volume. If the objective is to build an optimized prototype of a 4-electrode probe, then a numerical solution for the sensitivity distribution has to be investigated.

The objective of this paper is to develop an adapted numerical solution for both electrical field and sensitivity distribution within a heterogeneous semi-infinite isotropic medium of finite thickness by using the Image Source (IS) technique together with the Gauss's law for the electricity.

Methods

Firstly, the governing equation for the electrical field within a semi-infinite homogeneous volume conductor h mm-thick is developed by using the Gauss's law together with the IS technique in order to satisfy border conditions. This technique consists of placing image sources at regions outside of the volume conductor in order to minimize the electrical field constrain around of its border. The

addition of each image source in the solution reduces significantly the perpendicular component of the electrical field at the borders of the volume conductor.

Second, a similar solution of the electrical field is developed for a semi-infinite heterogeneous medium consisted of two layers with different conductivity. An algorithm was implemented in MATLAB™ in order to investigate the convergence of the electrical field and also to calculate the current density. It was set a volume conductor of $100 \times 100 \times 20$ mm with 1 mm grid and then placed two electrodes equally spaced on the surface at coordinates (0,10,00) and (0,10-10). A number of 100 current image sources were used.

Results

It was shown that the implemented solution agrees with the theorem of the divergence. The results showed that the modulus of the electrical field converges after using 100 current image sources but after 10 ones for the case of the current density. It was also showed that the mean sensitivity over a layer depends on its thickness and conductivity.

Conclusion

The electrical field within a bi-layered homogeneous semi-infinite volume conductor with a finite thickness was developed by using the Gauss's law together with the image source technique. The convergence of the solution was established. The preliminary results showed that it should be possible to improve a tetrapolar probe for detecting pathological changes in tissue, as for example in skin cancer.

Introdução

A impedância medida entre dois eletrodos localizados na superfície de um material biológico é determinada pela condutividade elétrica dos elementos de volume (i.e. *voxel*) contidos no interior do material sob estudo. Se a condutividade de um determinado *voxel* mudar, então o par de eletrodos na superfície do material detectará essa mudança. Esta detecção é quantificada através da sensibilidade que, por sua vez, é definida como sendo a “mudança fracionária da impedância medida entre dois eletrodos localizados na superfície de um volume condutor, quando ocorre uma mudança na condutividade elétrica no interior de um *voxel* deste volume” (Geselowitz, 1971), também conhecido como teorema de Geselowitz. Este teorema é fundamental para entender como a impedância elétrica medida na superfície de um material biológico muda com a profundidade de penetração da corrente injetada e com a distribuição da sensibilidade no meio. Segundo este teorema, a sensibilidade pode ser calculada como sendo o produto escalar entre os vetores campo elétrico resultante devido aos eletrodos de injeção de corrente e devido aos eletrodos de medição do potencial, considerando o volume condutor semi-infinito, homogêneo e isotrópico, correntes unitárias e eletrodos pontuais.

O cálculo do campo elétrico em um ponto P do espaço produzido por uma carga pontual colocada em um ponto A localizado a uma distância $\hat{r}_{PA}$ deste ponto P é um problema bem conhecido na eletrostática e é definido segundo a lei de Gauss para a eletricidade. O conhecimento do campo elétrico e, conseqüentemente, da densidade de corrente $\hat{J}$ ($\hat{J} = \sigma \hat{E}$, onde σ é a condutividade do meio) possibilitaria, por exemplo, estudar a relação entre um arranjo de eletrodo, usado para medir a diferença de potencial na superfície de tecidos biológicos, e a distribuição da corrente elétrica.

Desde a década de 50, estudos vêm sendo feitos nesta área no sentido de encontrar uma solução analítica para o cálculo da distribuição da corrente elétrica em um volume condutor de tamanho finito, onde os eletrodos de medição também são de tamanhos finitos. Por isso, soluções numéricas complexas por meio da técnica dos elementos finitos vêm sendo bastante usadas por vários pesquisadores (Steendijk *et al.*, 1993; Wang *et al.*, 1998). Mesmo utilizando esta técnica, tem sido mostrado que há divergências entre resultados práticos e teóricos quando o volume condutor é considerado heterogêneo (e.g. multicamadas), como é o caso do tecido biológico (Bertemes-Filho, 2003; González-Correa *et al.*, 1999; Jones *et al.*, 2003; Walker *et al.*, 2002). No entanto, soluções analíticas também podem

ser usadas, assumindo que os eletrodos são pontuais e que o volume condutor sob estudo é Semi-infinito, Homogêneo e Isotrópico (SHI) (Bertemes-Filho *et al.*, 2001; Brown *et al.*, 2000).

O principal objetivo deste artigo é definir e aplicar as equações do campo elétrico em um volume condutor SHI de duas camadas utilizando a técnica das Fontes Imaginárias (FI) para garantir as condições de contorno deste volume. Também será investigada a influência da distribuição da condutividade elétrica no cálculo da sensibilidade, considerando um volume condutor SHI de duas camadas.

Método

A técnica das fontes imaginárias

Volume condutor homogêneo de espessura h – Quando o meio em que o campo elétrico se encontra é semi-infinito, ou seja, as dimensões geométricas do volume condutor são semi-infinitas, a equação do campo elétrico pode ser usada sem nenhuma restrição. No entanto, quando o meio é semi-infinito mas de espessura finita, as condições de contorno deste volume devem ser satisfeitas.

Considerando um volume condutor SHI de resistividade ρ_1 e de espessura h , limitado por uma superfície S1 e por uma camada isolante S2, deseja-se determinar a distribuição do campo elétrico devido a uma fonte de corrente I_0 situada na origem da superfície do volume condutor, como mostra a Figura 1. O vetor campo elétrico é determinado segundo a lei de Gauss, de tal modo que a solução deve satisfazer as seguintes condições de contorno: i) a componente vertical da corrente é zero em qualquer ponto ao longo da superfície S1, exceto no eletrodo; ii) o potencial tende a zero na camada isolante S2.

Particularmente neste trabalho, a técnica das Fontes Imaginárias (FI) é usada para calcular o vetor campo elétrico em qualquer ponto do volume condutor SHI, satisfazendo as condições de contorno. Esta técnica consiste em colocar fontes imaginárias em regiões externas ao volume condutor, onde o campo elétrico está sendo calculado, fazendo com que a componente perpendicular do campo elétrico seja cancelada. Deste modo, o vetor campo elétrico resultante em cada ponto dentro do volume condutor será a soma de todos os campos elétricos individuais produzidos por cada fonte imaginária sozinha.

O vetor campo elétrico nas superfícies S1 e S2 são calculados nos pontos Q e P, respectivamente (ver Figura 1). Ao longo da camada isolante S2, o vetor campo

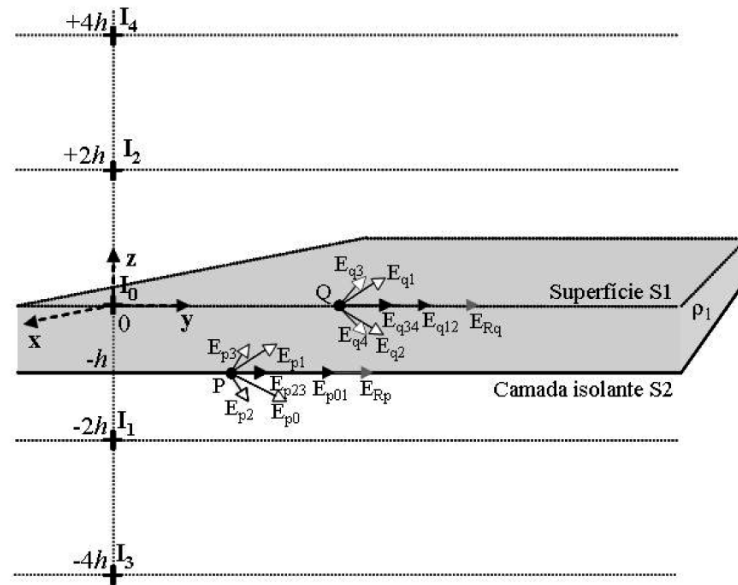


Figura 1. Representação em 3D do volume condutor SHI, de espessura h , mostrando os vetores campo elétrico produzidos por cada fonte de corrente imaginária nos pontos P e Q, onde $\hat{E}_{Rp} = \hat{E}_{p0} + \hat{E}_{p1} + \hat{E}_{p2} + \hat{E}_{p3}$ e $\hat{E}_{Rq} = \hat{E}_{q1} + \hat{E}_{q2} + \hat{E}_{q3} + \hat{E}_{q4}$.
Figure 1. Diagram of a SHI volume conductor of thickness h showing the electrical field vectors produced by each image current source placed at P and Q, where $\hat{E}_{Rp} = \hat{E}_{p0} + \hat{E}_{p1} + \hat{E}_{p2} + \hat{E}_{p3}$ and $\hat{E}_{Rq} = \hat{E}_{q1} + \hat{E}_{q2} + \hat{E}_{q3} + \hat{E}_{q4}$.

elétrico no ponto P devido à fonte I_0 é proporcional ao módulo da distância vetorial entre o ponto P e a fonte I_0 , e é direcionado da fonte I_0 para o ponto P (E_{p0} na Figura 1). Para que as condições de contorno sejam satisfeitas é necessário colocar uma fonte imaginária I_1 a uma distância do ponto P tal que o vetor campo elétrico E_{p1} cancele a componente perpendicular ao plano xy do vetor campo elétrico E_{p0} (ver Figura 1). Deste modo, o vetor campo elétrico resultante no ponto P será determinado por E_{p01} , que por sua vez é a soma das componentes x, y dos vetores campo elétrico E_{p0} e E_{p1} .

Ao longo da superfície S1, a fonte imaginária I_1 produz um vetor campo elétrico E_{q1} no ponto Q que, por sua vez, tem direção saindo do plano xy da superfície S1 (ver Figura 1). Para que a componente perpendicular ao plano da superfície S1 do vetor campo elétrico E_{q1} seja cancelada, uma segunda fonte imaginária I_2 é colocada a certa distância da fonte imaginária I_1 . Deste modo, o vetor campo elétrico resultante no ponto Q pode ser calculado como sendo a soma dos vetores campo elétrico E_{q1} e E_{q2} (vetor campo elétrico devido a I_2). Consequentemente, a fonte imaginária I_2 produz um vetor campo elétrico E_{p2} no ponto P, cuja componente perpendicular ao plano xy da camada isolante S2 deve ser cancelada por uma terceira fonte imaginária I_3 (ver Figura 1).

Finalmente, pode ser concluído que é necessário um número infinito de fontes imaginárias para que as condições de contorno sejam completamente satisfeitas. Portanto, o vetor campo elétrico total $\hat{E}_{Rp}$ no ponto P, devido à fonte I_0 e todas as fontes imaginárias I_i , pode ser calculado de acordo com a equação 1.

$$\hat{E}_{Rp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{r}_p - \hat{r}_{pi}}{|\hat{r}_{pi}|^3} \quad (1)$$

onde q é uma carga puntiforme positiva, ϵ_0 é a permissividade do meio, $\hat{r}_p$ é a distância vetorial entre a origem e o ponto P, $\hat{r}_i$ é a distância vetorial entre a origem e as fontes imaginárias e $\hat{r}_{pi}$ é a distância vetorial entre o ponto P e a i -ésima fonte imaginária.

Volume condutor heterogêneo com duas camadas – Com base no volume condutor SHI da Figura 2, considera-se as seguintes condições:

- o vetor campo elétrico no ponto P depende da fonte de corrente I_0 e sua imagem I_1 ;
- o vetor campo elétrico no ponto Q depende somente da fonte de corrente imaginária I_2 que, por sua vez, tem módulo igual à soma das fontes I_0 e I_1 . Isto ocorre porque a fonte de corrente I_0 é substituída por uma fonte de corrente imaginária I_2 , como se estivesse agindo sozinha sobre o ponto Q;
- existe continuidade de corrente no plano xy da interface entre os dois meios, de tal modo que:

$$\hat{E}_{1x} = \hat{E}_{2x} \quad (2)$$

$$\hat{E}_{1y} = \hat{E}_{2y} \quad (3)$$

$$\sigma_1 \cdot \hat{E}_{1z} = \sigma_2 \cdot \hat{E}_{2z} \quad (4)$$

Para efeitos de simplificação no cálculo do campo elétrico na interface entre os dois meios, considera-se um ponto R na coordenada (0,0,-a), como mostrado na Figura 2. Com base na equação 1 e na geometria da Figura 2, as componentes em z dos vetores campo elétrico $\hat{E}_{1z}$ e $\hat{E}_{2z}$ podem ser escritas como:

$$\hat{E}_{1z} \propto \frac{I_0}{a^2} - \frac{I_1}{a^2} \quad (5)$$

e

$$\hat{E}_{2z} \propto \frac{I_2}{a^2} \quad (6)$$

Substituindo as equações (5) e (6) em (4), e sabendo que $|I_2| = |I_1 + I_0|$, tem-se que:

$$|I_1| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot |I_0| \quad (7)$$

e

$$|I_2| = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot |I_0| \quad (8)$$

Portanto, o vetor campo elétrico resultante no ponto P pode ser calculado usando o princípio da superposição, assim:

$$\hat{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\hat{r}_P - \hat{r}_0}{|\hat{r}_{P0}|^3} + \alpha \cdot \frac{\hat{r}_P - \hat{r}_1}{|\hat{r}_{P1}|^3} \right] \quad (9)$$

onde $\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2)$.

e

$$\hat{E}_Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\beta \cdot \frac{\hat{r}_Q - \hat{r}_2}{|\hat{r}_{Q2}|^3} \right] \quad (10)$$

onde $\beta = 2\sigma_1 / (\sigma_1 + \sigma_2)$.

As equações (9) e (10) são usadas somente quando a espessura da segunda camada é infinita. No entanto, quando a espessura da segunda camada é considerada finita, a técnica FI pode ser usada para que as condições de contorno nas superfícies S1 e S2 sejam satisfeitas. Analisaremos separadamente o vetor campo elétrico em cada uma das camadas.

1) Vetor campo elétrico na 1ª camada (σ_1)

Para efeitos de simplificação no cálculo do vetor campo elétrico usando a técnica FI, está sendo considerado somente o plano yz (i.e. $x = 0$) do volume condutor, como mostrado na Figura 3. A primeira camada tem espessura a e condutividade σ_1 , e a segunda tem espessura b e condutividade σ_2 .

A fonte de corrente imaginária I_1 produz um campo elétrico ao longo da superfície S1, cuja componente em z tem direção saindo do plano da superfície. Logo, é necessário colocar uma fonte de corrente imaginária $I_{\text{imag}(1)}$, de módulo igual à fonte de corrente I_1 (i.e. $I_{\text{imag}(1)} = \alpha I_0$), a uma distância de $2a$ de I_0 , de modo que as condições de contorno sejam satisfeitas. No entanto, a fonte de corrente $I_{\text{imag}(1)}$ produz um campo elétrico no ponto R que, consequentemente, viola a condição de continuidade entre os dois meios. Logo, é necessário colocar uma fonte de corrente imaginária I_2 , de módulo igual a $\alpha^2 I_0$, a uma distância de $4a$

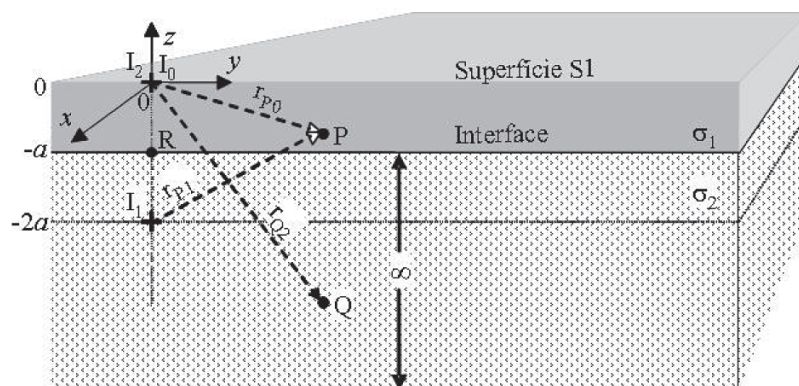


Figura 2. Volume condutor não-homogêneo de duas camadas, onde a primeira camada tem uma espessura a e condutividade σ_1 , e a segunda camada tem uma espessura infinita e condutividade σ_2 . **Figure 2.** Diagram of an inhomogeneous volume conductor of two layers, where the first one has a thickness a and conductivity σ_1 and the second one has an infinite thickness and conductivity σ_2 .

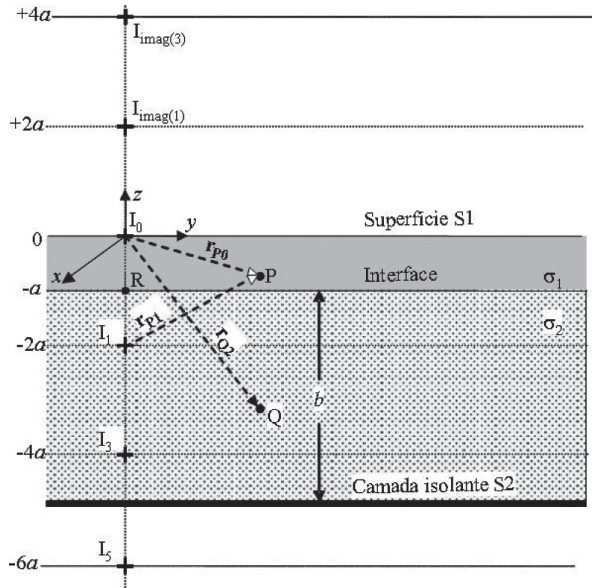


Figura 3. Representação em 2D do volume condutor de duas camadas com espessuras finitas. **Figure 3.** Diagram of a volume conductor with two layers of finite thickness.

de I_0 . Novamente, é necessário satisfazer a condição de contorno na superfície S1, sendo assim uma fonte de corrente imaginária $I_{\text{imag}(3)}$ de módulo igual ao da fonte de corrente I_3 , deve ser colocada a uma distância de $4a$ de I_0 . Assim sucessivamente, é necessário usar um número infinito de fontes imaginárias para que ambas as condições de contorno na superfície S1 e de continuidade entre os dois meios sejam satisfeitas. Por recorrência, o módulo da i -ésima fonte de corrente imaginária pode ser calculada da seguinte forma:

$$|I_i| = |I_{\text{imag}(i)}| = |I_0| \cdot \alpha^{\left(\frac{i+1}{2}\right)} \quad (11)$$

onde i é um número ímpar (i.e. $i = 1, 3, 5, 7, 9, \dots, n-1$) e n é um número par que define o total de fontes imaginárias usadas no cálculo do vetor campo elétrico.

Portanto o vetor campo elétrico em um ponto P, contido pela primeira camada do volume condutor, pode ser calculado segundo a equação 12.

$$\hat{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\hat{r}_P - \hat{r}_0}{|\hat{r}_P - \hat{r}_0|^3} + \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} \alpha^{\frac{i+1}{2}} \cdot \left(\frac{\hat{r}_P - \hat{r}_i}{|\hat{r}_P - \hat{r}_i|^3} + \frac{\hat{r}_P - \hat{r}_{\text{imag}(i)}}{|\hat{r}_P - \hat{r}_{\text{imag}(i)}|^3} \right) \right] \quad (12)$$

2) Vetor campo elétrico na 2ª camada (σ_2)

Como já descrito nesta seção, o vetor campo elétrico no ponto Q depende somente da fonte de corrente

imaginária I_2 que, por sua vez, tem módulo igual à soma das fontes I_0 e I_1 . Como a camada isolante S2 tem uma espessura b , é necessário colocar uma fonte de corrente imaginária $I_{\text{imag}(2)}$ de módulo igual a I_2 , a uma distância de $2(a+b)$ para que as condições de contorno da camada isolante sejam satisfeitas.

Analogamente, a fonte de corrente imaginária I_4 deve ter módulo igual ao da soma das fontes $I_{\text{imag}(1)}$ e I_3 , ambas colocadas para satisfazer as condições de contorno na superfície S1 e para que a condição de continuidade entre os dois meios sejam respectivamente satisfeitas. Com base na geometria da Figura 3, as componentes em z do vetor campo elétrico, no ponto R, podem ser calculados segundo as equações 13 e 14.

$$\hat{E}_{1z} \propto \frac{I_{\text{imag}(1)}}{(3a)^2} - \frac{I_3}{(3a)^2} \quad (13)$$

$$\hat{E}_{2z} \propto \frac{I_4}{(3a)^2} \quad (14)$$

Substituindo as equações (13) e (14) em (4) e sabendo que $|I_4| = |I_{\text{imag}(1)} + I_3|$, tem-se que:

$$|I_4| = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot |I_{\text{imag}(1)}| = \beta \cdot \alpha \cdot |I_0| \quad (15)$$

Também o módulo da fonte de corrente imaginária I_6 ($|I_6| = |I_{\text{imag}(3)} + I_5|$) pode ser calculado como segue:

$$|I_6| = \beta \cdot \alpha^2 \cdot |I_0| \quad (16)$$

Por recorrência, o módulo da j -ésima fonte de corrente imaginária pode ser calculada segundo a equação 17.

$$|I_j| = |I_0| \cdot \beta \cdot \alpha^{\left(\frac{j-2}{2}\right)} \quad (17)$$

onde j é um número par (i.e. $j = 2, 4, 6, 8, \dots, n$).

Portanto o vetor campo elétrico em um ponto Q, contido dentro da segunda camada do volume condutor, pode ser calculado segundo a equação 18.

$$\hat{E}_Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \beta \cdot \left[\sum_{j=2,4,6,\dots}^n \alpha^{\left(\frac{j-2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\hat{r}_Q - \hat{r}_j}{|\hat{r}_Q - \hat{r}_j|^3} \right) \right] \quad (18)$$

Volume condutor heterogêneo multicamadas – Com base no volume condutor SHI da Figura 4, aplica-se as mesmas três condições de contorno citadas na seção anterior, considerando um ponto S na coordenada $(0,0,-b)$. Com base na equação 1, as componentes em z dos vetores campo elétrico $\hat{E}_{2z}$ e $\hat{E}_{3z}$ podem ser obtidas (ver equações 5 e 6). O vetor campo elétrico no ponto T dependerá somente da fonte de corrente imaginária I_3 que, por sua vez, tem módulo igual à soma das fontes I_2 (veja equação 8) e sua imagem $I_{\text{imag}(2)}$

dentro da terceira camada, como mostrado na Figura 4. As equações das fontes de corrente imaginária I_3 e $I_{\text{imag}(2)}$ são dadas por:

$$|I_{\text{imag}(2)}| = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3} \cdot |I_2| \quad (19)$$

e

$$|I_3| = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_3} \cdot |I_2| \quad (20)$$

Pode ser visto nas equações 19 e 20 que o vetor campo elétrico no ponto T depende da condutividade elétrica das três camadas deste volume condutor. Por recorrência, o cálculo do vetor campo elétrico no interior da camada N, onde $N \geq 3$, de um volume condutor multicamadas dependerá das fontes de corrente I_N , I_{N-1} e sua imagem $I_{\text{imag}(N-1)}$, assim:

$$|I_{N-1}| = (2)^{N-2} \cdot |I_0| \cdot \prod_{i=1}^{N-2} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_{i+1}} \right) \quad (21)$$

$$|I_{\text{imag}(N-1)}| = \frac{\sigma_{N-1} - \sigma_N}{\sigma_{N-1} + \sigma_N} \cdot |I_{N-1}| \quad (22)$$

e

$$|I_N| = (2)^{N-1} \cdot |I_0| \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_{i+1}} \right) \quad (23)$$

Portanto, os vetores campo elétrico resultantes em um ponto U na camada N-1, e em um ponto V na camada N, podem ser calculados usando o princípio da superposição, assim:

$$\hat{E}_U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[(2)^{N-2} \cdot \prod_{i=1}^{N-2} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_{i+1}} \right) \right] \cdot \left\{ \frac{\hat{r}_U - \hat{r}_{N-1}}{|\hat{r}_{U(N-1)}|^3} + \gamma \cdot \frac{\hat{r}_U - \hat{r}_{\text{imag}(N-1)}}{|\hat{r}_{U\text{imag}(N-1)}|^3} \right\} \quad (24)$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{\sigma_{N-1} - \sigma_N}{\sigma_{N-1} + \sigma_N} \text{ e } N \geq 3.$$

e

$$\hat{E}_V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[(2)^{N-1} \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_{i+1}} \right) \right] \cdot \left\{ \frac{\hat{r}_V - \hat{r}_N}{|\hat{r}_{VN}|^3} \right\} \quad (25)$$

É importante mencionar que as equações (24) e (25) podem ser usadas somente quando a espessura da camada N é infinita. No entanto, quando a espessura da camada N é considerada finita, a técnica FI

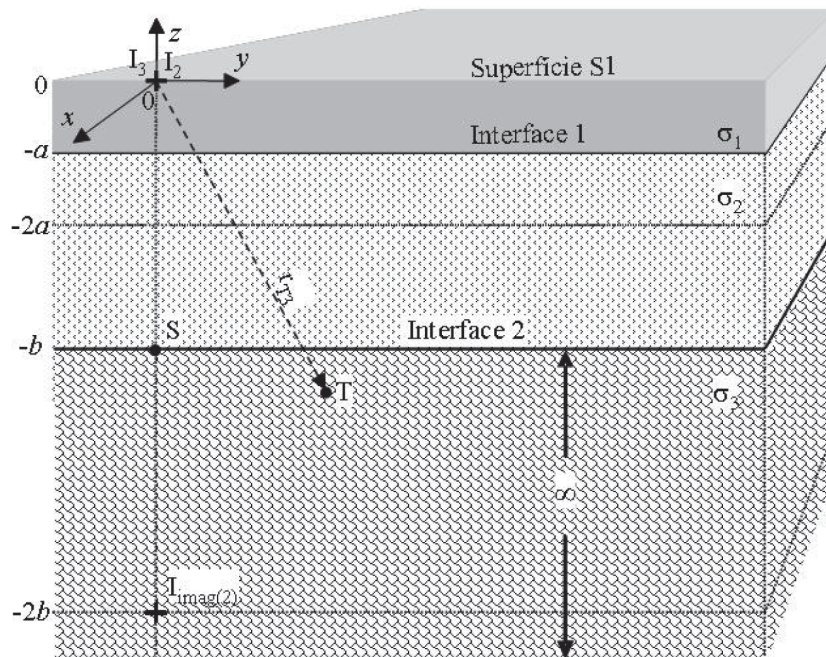


Figura 4. Volume condutor não-homogêneo de três camadas, onde a segunda camada tem espessura b e condutividade σ_2 , e a terceira camada tem espessura infinita e condutividade σ_3 . **Figure 4.** Diagram of an inhomogeneous volume conductor of three layers, where the second one has a thickness b and conductivity σ_2 and the third one has an infinite thickness and conductivity σ_3 .

pode ser usada para que as condições de contorno nas N superfícies de contato entre as camadas sejam satisfeitas, como demonstrado na seção anterior pelas equações 12 e 18.

Cálculo da Sensibilidade

Para o cálculo da sensibilidade, um algoritmo escrito em MATLABTM calcula o produto escalar entre o vetor campo elétrico resultante E_{AB} (devido aos eletrodos de corrente A e B), e o vetor campo elétrico resultante E_{CD} (devido aos eletrodos de potencial C e D), em qualquer ponto dentro do volume condutor, como mostra a Figura 5. Para o caso do volume condutor do tipo SHI mostrado na Figura 3, foram usadas 30 fontes de corrente imaginárias para o cálculo da sensibilidade através das equações 12 e 18. Os parâmetros para os cálculos foram: volume condutor de $100 \times 100 \times 10$ mm com 1 mm de grade, sendo a primeira camada com 3 mm de espessura (i.e. $a = 3$ mm) e condutividade unitária, e a segunda camada com espessura de 7 mm (i.e. $b = 7$ mm) e condutividade 2 vezes maior do que a primeira. Os eletrodos de injeção e retorno de corrente I (eletrodos A e B) e de medição da diferença de potencial V (eletrodos C e D) são colocados na superfície do volume condutor. Os eletrodos foram colocados igualmente espaçados de 10 mm, como mostra a Figura 5.

Em seguida, a sensibilidade média é calculada para cada camada do volume condutor, usando neste caso somente 20 fontes de corrente imaginárias. Por fim, com a finalidade de estudar a influência da condutividade elétrica das camadas do volume condutor no cálculo da sensibilidade média, a condutividade da segunda camada foi variada de 0,5 a 2,5 S/mm, usando uma condutividade fixa de 1,0 S/mm para a primeira camada.

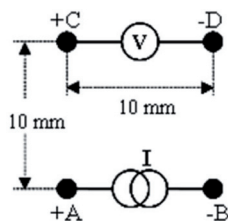


Figura 5. Geometria do arranjo tetrapolar de eletrodos utilizada no cálculo da sensibilidade média em cada camada do volume condutor SHI da Figura 3. **Figure 5.** Tetrapolar electrode array used to calculate the mean sensitivity over each layer from the volume conductor shown in Figure 3.

Cálculo da Densidade de Corrente ($\hat{J}$)

De modo análogo ao cálculo do vetor campo elétrico, o vetor densidade de corrente $\hat{J}$ também pode ser usado para investigar a convergência da solução adotada neste trabalho. Neste caso, pode-se calcular a corrente total que circula dentro do volume condutor. Para que isto seja possível, é necessário colocar uma segunda fonte de corrente pontual $-I$ na superfície do volume condutor para que a corrente $+I$ tenha seu caminho de retorno, como mostra a Figura 6. Adotar-se-á neste trabalho que a corrente $+I$ é injetada no volume condutor através de um eletrodo pontual A e que a corrente $-I$ é retornada pelo eletrodo pontual B, onde os sinais “+” e “-” indicam fonte e dreno, respectivamente.

O vetor densidade de corrente $\hat{J}_A$ no eletrodo A, devido à corrente de injeção $+I$, pode ser calculado segundo a equação 19. É sabido que o módulo deste vetor atinge seu valor máximo no plano xz (i.e. $y = 0$) entre os eletrodos A e B (ver Figura 6).

$$\hat{J}_A = \sigma \cdot \hat{E}_A = \frac{+I}{\pi} \cdot \frac{\hat{r}_{Ap}}{|\hat{r}_{Ap}|^3} \quad (26)$$

onde o vetor $\hat{r}_{Ap}$ é a distância vetorial entre o eletrodo pontual A e o ponto P.

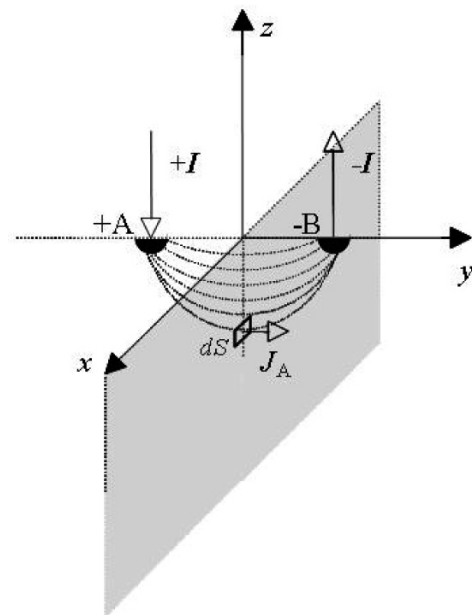


Figura 6. Plano xz entre os eletrodos A e B, mostrando a injeção da corrente através do eletrodo A e o seu retorno através do eletrodo B, onde dS é um elemento de área unitário. **Figure 6.** The xz plane between A and B electrodes, where A is the current injecting electrode, B is the current returning electrode and dS is an unit element of area.

De modo análogo, tem-se que:

$$\hat{J}_B = \sigma \cdot \hat{E}_B = \frac{-I}{\pi} \cdot \frac{\hat{r}_{Bp}}{|\hat{r}_{Bp}|^3} \quad (27)$$

onde o vetor $\hat{r}_{Bp}$ é a distância vetorial entre o eletrodo pontual B e o ponto P.

Considerando que o volume condutor é do tipo SHI e, consequentemente, aplicando o princípio da superposição, tem-se que:

$$\hat{J}_R = \hat{J}_A + \hat{J}_B = \frac{I}{\pi} \cdot \left[\frac{\hat{r}_{Ap}}{|\hat{r}_{Ap}|^3} - \frac{\hat{r}_{Bp}}{|\hat{r}_{Bp}|^3} \right] \quad (28)$$

Assumindo que a fonte de corrente +I é unitária e que os eletrodos A e B são pontuais e eqüidistantes à origem, a corrente resultante que atravessa um elemento unitário de área dS do plano xz (ver Figura 6) pode ser calculada em função da profundidade (i.e., coordenada z) deste elemento em relação ao plano xy dos eletrodos. Consequentemente, a somatória da corrente resultante total ao longo do eixo z deve ser necessariamente igual à unidade.

Resultados

Uma solução analítica para o cálculo do campo elétrico em um volume condutor SHI de espessura finita, usando a técnica FI, foi desenvolvida em MATLAB™ com a finalidade de investigar a convergência da solução.

Campo elétrico ($\hat{E}$)

A Figura 7 mostra um volume condutor do tipo SHI de 10 mm de espessura. Na origem do plano xy da superfície S1 (i.e. $z = 0$), é colocada uma fonte de corrente

pontual +I de valor unitário. O vetor campo elétrico é calculado nas coordenadas (0,10,00 e (0,10,-10), usando 100 fontes imaginárias. O volume condutor tem 100×100×10 mm de dimensão e 1 mm de grade.

As Figuras 8a e 8b mostram a soma acumulada do vetor campo elétrico em função do número de fontes imaginárias. Pode ser visto que 100 fontes imaginárias são suficientes para que as condições de contorno sejam alcançadas. Embora a componente em y do vetor campo elétrico no eixo y tenha seu valor aumentado devido ao aumento do número de fontes imaginárias, a convergência da solução foi alcançada. Sabendo que a componente perpendicular aos planos xy da superfície S1 e da camada isolante S2 devem ser zero, já era esperado, neste caso, um aumento da componente em y do campo elétrico em ambas os pontos tomados como exemplo.

Densidade de corrente ($\hat{J}$)

Uma solução analítica foi desenvolvida em MATLAB™ usando um volume condutor do tipo SHI com 100×100×20 mm de dimensões e 1 mm de grade (i.e. conjunto solução de 200 mil elementos). Os eletrodos A e B são colocados eqüidistantes à origem no plano xy da superfície, e são separados de 10 mm. A corrente total que atravessa o plano xz entre os eletrodos A e B é calculada em função da profundidade (i.e. eixo z). São considerados dois casos: Caso I – volume condutor do tipo SHI de espessura h semi-infinita, ou seja, o vetor campo elétrico é calculado do modo direto, sem usar a técnica FI; Caso II – volume condutor do tipo SHI limitado por uma camada isolante localizada a 20 mm de profundidade. Neste caso, o vetor campo

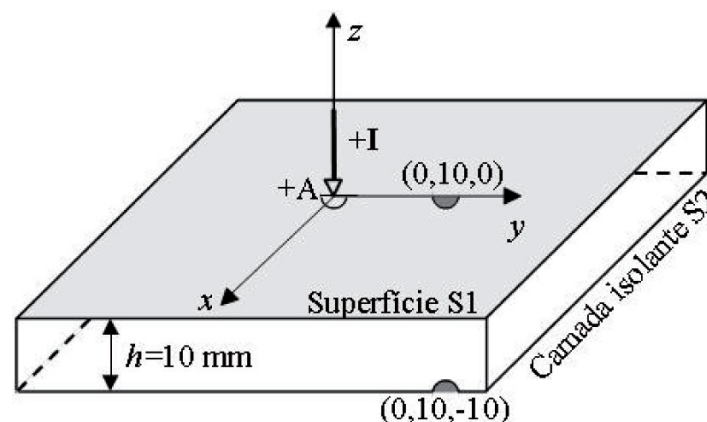
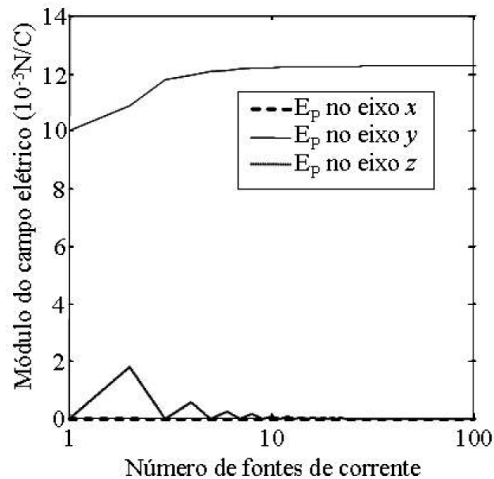
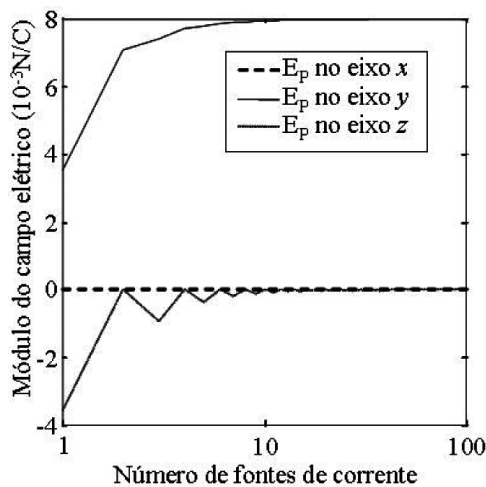


Figura 7. Modelo do volume condutor SHI de 10 mm de espessura implementado em MATLAB™, onde A é um eletrodo pontual localizado na origem do sistema de coordenadas. **Figure 7.** Diagram of the SHI volume conductor of 10 mm thick used in the MATLAB™ modeling, where A is the point electrode placed at the origin.



(a)



(b)

Figura 8. Gráfico do módulo do campo elétrico versus o número de fontes de corrente usadas no cálculo: (a) campo elétrico no ponto de coordenada (0,10 mm,0); (b) campo elétrico no ponto de coordenada (0,10 mm,-10 mm). **Figure 8.** The modulus of the electrical field plotted against the number of image current sources used in the modeling. (a) electrical field at coordinates (0,10 mm,0); (b) electrical field at coordinates (0,10 mm,-10 mm).

elétrico é calculado usando a técnica FI para 2, 6 e 10 fontes imaginárias.

A Figura 9 mostra a soma acumulada da componente da corrente, perpendicular ao plano xz entre os eletrodos A e B, em função da profundidade (i.e. eixo z). Pode ser visto que somente 73% da corrente $+I$, injetada pelo eletrodo A, circula pelo volume condutor de

espessura semi-infinita. No entanto, toda corrente $+I$ circula pelo volume condutor de 20 mm de espessura quando 10 fontes imaginárias são usadas para o cálculo do campo elétrico. Observa-se que o vetor densidade de corrente converge mais rapidamente que o vetor campo elétrico.

Pode ser também observado na Figura 9 que a somatória da corrente aumenta mais rapidamente à medida que o número de fontes imaginárias é aumentado. Isto pode ser explicado pelo fato de que existe um aumento significativo no campo elétrico, resultante da contribuição individual de cada fonte imaginária.

Sensibilidade média

Pode ser observado na Figura 10 que a sensibilidade nas regiões próximas à camada isolante S_2 é muito pequena, ou seja, os eletrodos dificilmente detectarão alguma mudança de condutividade elétrica nesta profundidade (i.e. 20 mm). Para que a sensibilidade de medição aumente, é necessário que a primeira camada do volume condutor seja mais condutiva do que a segunda (i.e. $\sigma_1 = 2\sigma_2$), como mostrado na Figura 10. Também pode ser visto que ocorre um máximo na sensibilidade média a uma profundidade proporcional à espessura da primeira camada. Pode-se dizer que a sensibilidade no interior da primeira camada aumenta à medida que sua condutividade elétrica aumenta.

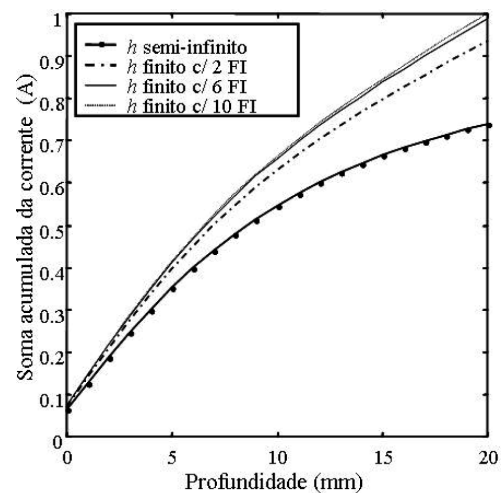


Figura 9. Gráfico da soma acumulada da corrente, que atravessa o plano xz entre os eletrodos, versus a profundidade, onde FI é o número de fontes de corrente imaginária.

Figure 9. The total current, which flows through the xz plane between electrodes, plotted against depth, where FI is the number of image current sources.

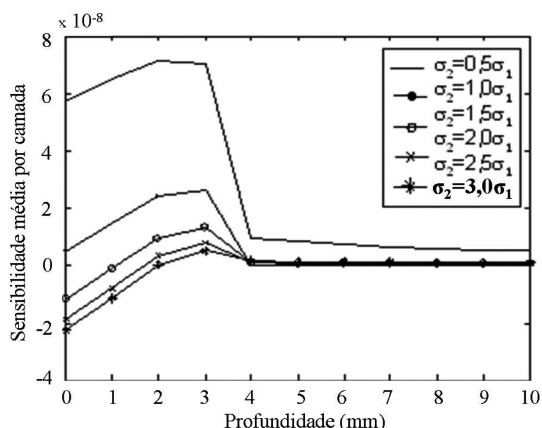


Figura 10. Gráfico da sensibilidade média por camada do volume condutor versus profundidade, onde os parâmetros para o cálculo foram: malha de 100×100×20 mm, eletrodos separados de 10 mm, $a = 3$ mm e $b = 7$ mm. **Figure 10.** The mean sensitivity over a layer plotted against depth. It was used a volume conductor of 100×100×20 mm, distance between electrodes of 10 mm, first layer thickness of 3 mm and of 7 mm for the second one.

Discussão e Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma solução analítica simplificada para o cálculo do campo elétrico, em coordenadas cartesianas, tanto para um volume condutor do tipo SHI de espessura semi-infinita como para um de espessura finita. Foi demonstrado que as soluções analíticas adotadas neste trabalho para o campo elétrico e para a densidade de corrente satisfazem o princípio da convergência. Verificou-se que 100 fontes de corrente imaginárias foram necessárias para se obter a convergência do campo elétrico, e 10 fontes para os casos da densidade de corrente. Já as investigações da distribuição da sensibilidade, em um volume condutor SHI de duas camadas finita, mostraram que tanto as espessuras das camadas como sua condutividade elétrica têm muita influência na sensibilidade. Quanto maior a condutividade elétrica da primeira camada em relação à segunda, maior será a sensibilidade no interior da segunda camada. É importante mencionar que o espaçamento entre os eletrodos na superfície também influencia na distribuição da sensibilidade, pois quanto maior o espaçamento, maior será a profundidade de penetração da corrente injetada pelo eletrodo (Bertemes-Filho, 2003). Mesmo assumindo espessura finita para o volume condutor, suas regiões laterais foram consideradas de dimensões semi-infinitas. A aplicação das condições de contorno nessas laterais tornaria

o cálculo do campo elétrico, por meio da técnica FI, bastante complexo. Neste caso, a técnica dos elementos finitos far-se-á necessária, onde um volume condutor de multicamadas poderia ser melhor discretizado. No entanto, a aplicação da técnica FI mostrada neste trabalho pode ser, por exemplo, considerada em estudos da influência de estímulos elétricos no tórax humano em marca-passos do coração, bem como o melhoramento de arranjos de eletrodos na detecção de nódulo cancerígenos subcutâneos.

Agradecimentos

À minha esposa Elisângela pela dedicação e compreensão, e à Universidade do Estado de Santa Catarina pelo apoio institucional.

Referências

- Bertemes-Filho, P. (2003), *Tissue characterization using an impedance spectroscopy probe*, Tese de Doutorado (PhD), Programa de Engenharia Clínica e Física Médica, Faculty of Engineering/University of Sheffield, Sheffield (UK), 197 p., Jan.
- Bertemes-Filho, P., Brown, B.H., Smallwood, R.H., Wilson, A.J. (2001), "Tetrapolar probe measurements: can the sensitivity distribution be improved?", In: *Proceedings of the 11th International Conference on Electrical Bio-Impedance*, Oslo, p. 561-564, 17-21 Jun.
- Brown, B.H., Wilson, A.J., Bertemes-Filho, P. (2000), "Bipolar and tetrapolar transfer impedance measurements from a volume conductor", *Electronics Letters*, v. 36, n. 25, p. 2060-2061.
- Geselowitz, D.B. (1971), "An application of electrocardiographic lead theory to impedance plethysmography", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 18, n. 1, p. 38-41.
- González-Correa, C.A., Brown, B.H., Smallwood, R.H., Kalia, N., Stoddard, C.J., Stephenson, T.J., Haggie, S.J., Slater, D.N., Bardhan, K.D. (1999), "Virtual biopsies in Barrett's esophagus using an impedance probe", *Annals of the New York Academy of Sciences*, n. 873, p. 313-321.
- Jones, D.M., Smallwood, R.H., Hose, D.R., Brown, B.H., Walker, D.C. (2003), "Modelling of epithelial tissue impedance measured using three different designs of probe", *Physiological Measurement*, v. 24, n. 2, p. 605-623.
- Steendijk, P., Mur, G., van der Veld, E.T., Baan, J. (1993), "The four-electrode resistivity technique in anisotropic media: theoretical analysis and application on myocardial tissue in vivo", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 40, n. 11, p. 1138-1148.
- Walker, D.C., Brown, B.H., Smallwood, R.H., Hose, D.R., Jones, D.R. (2002), "Modelled current distribution in cervical squamous tissue", *Physiological Measurements*, v. 23, p. 159-168.
- Wang, T., Chimpit, P.H., Haynor, D.R., Kim, Y. (1998), "Geometric effects on resistivity measurements with four-electrode probes in isotropic and anisotropic tissues", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 45, n. 7, p. 877-884.

