

Artigo Original

Recebido em 19/10/2009, aceito em 03/08/2010

Aplicação do algoritmo FDK para a reconstrução de imagens tomográficas multicortes

Application of the FDK algorithm for multi-slice tomographic image reconstruction

Paulo Roberto Costa*

Departamento de Física Nuclear - Instituto de Física / USP
Rua do Matão, Travessa R, 187
05508-090 São Paulo, SP – Brasil
E-mail: pcosta@if.usp.br

Ericky Caldas de Almeida Araújo

Fine Image Technology
Rua Sabará, 566, conj. 142.
01239-010 São Paulo, SP – Brasil

*Autor para correspondência

Resumo

O presente trabalho consiste no estudo e aplicação do algoritmo FDK (Feldkamp-Davis-Kress) para a reconstrução de imagens tomográficas utilizando a geometria de feixe cônico, resultando na implementação de um sistema adaptado de tomografia computadorizada multicortes (TCMC). O algoritmo FDK é a base de algoritmos de retroprojeção filtrada utilizados nos equipamentos de TCMC comercializados atualmente. Para a aquisição das projeções, utilizou-se uma plataforma giratória com goniômetro acoplado, um equipamento de raios X e um detector digital tipo CCD (*charge-coupled device*). Para processar a reconstrução das imagens foi utilizado um computador com processador Pentium® XEON™ 3.0, no qual foi implementado o algoritmo FDK. Inicialmente foi aplicado o algoritmo FDK original, no qual se assume o caso físico ideal no processo de medições. Em seguida foram incorporadas ao algoritmo algumas correções de artefatos relacionados ao processo de medição das projeções, tais como a alteração do filtro utilizado na etapa que precede a retroprojeção, para aumentar a razão sinal ruído das imagens e uma correção digital da centralização do sistema de aquisição das projeções. Para a calibração do sistema utilizou-se um objeto com distribuição de coeficientes de atenuação linear ($\mu(r)$) conhecida, que foi fabricado com esta finalidade. Por fim, o sistema de TCMC implementado foi utilizado na reconstrução tomográfica multicortes de um objeto não homogêneo, cuja distribuição $\mu(r)$ é desconhecida. Para avaliar a robustez do sistema e sua reprodutibilidade, foram analisados alguns aspectos das imagens reconstruídas, tais como: relação sinal ruído, concordância entre os valores de número CT medidos e determinados teoricamente, e a fidelidade na representação do objeto imageado. Durante a calibração do sistema foi verificada a relação linear entre o número CT e o coeficiente de atenuação linear dos materiais, o que valida a aplicação do sistema implementado para a caracterização dos coeficientes de atenuação linear de diferentes objetos.

Palavras-chave: Tomografia computadorizada, Algoritmo FDK, Tomografia computadorizada multicortes.

Abstract

This work consisted on the study and application of the FDK (Feldkamp-Davis-Kress) algorithm for tomographic image reconstruction using cone-beam geometry, resulting on the implementation of an adapted multi-slice computed tomography (MSCT) system. For the acquisition of the projections, a rotating platform coupled to a goniometer, an X-ray equipment and a digital image detector CCD (charge-coupled device) type were used. The FDK algorithm was implemented on a computer with a Pentium® XEON™ 3.0 processor, which was used for the reconstruction process. Initially, the original FDK algorithm was applied considering only the ideal physical conditions in the measurement process. Then some artifacts corrections related to the projections measurement process were incorporated. The implemented MSCT system was calibrated. A specially designed and manufactured object with a known linear attenuation coefficient distribution ($\mu(r)$) was used for this purpose. Finally, the implemented MSCT system was used for multi-slice tomographic reconstruction of an inhomogeneous object, whose distribution $\mu(r)$ was unknown. Some aspects of the reconstructed images were analyzed to assess the robustness and reproducibility of the system. During the system calibration, a linear relationship between CT number and linear attenuation coefficients of materials was verified, which validate the application of the implemented multi-slice tomographic system for the characterization of linear attenuation coefficients of distinct several objects.

Keywords: Computed tomography, FDK algorithm, Multi-slices computed tomography.

Extended Abstract

Introduction

The methods for image reconstruction can be classified as iterative methods and analytical methods. In the process of analytical reconstruction, the object to be reconstructed $f(\vec{r})$, which is characterized by the spatial distribution of the linear attenuation coefficients, and the set of measurements $p_\Phi(Y, Z)$, which characterizes the projection for each angular position Φ of the source, are treated as integrable functions. Therefore, the problem of reconstruction is treated in terms of integral equations. Finally, the discretization inherent in the measurement process and fundamental to computational implementation is performed.

The reconstruction algorithms are based on the different X-rays geometries.

Analytical reconstruction formula for the parallel beam geometry:

$$f(\vec{\rho}) = \oint d\Phi \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p_\Phi(Y) e^{i2\pi w Y} dY dw \right\} \quad (1)$$

Analytical reconstruction formula for the fan-beam geometry:

$$f(\vec{\rho}) = \oint d\theta \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p(l, \theta) e^{i2\pi w l [\hat{\rho}^i - l]} dl dw \right\} \quad (2)$$

where $w_x = w \cos(\theta)$, $w_y = w \sin(\theta)$, $x = \rho \cos(\phi)$ and $y = \rho \sin(\phi)$.

Analytical reconstruction formula for the cone-beam geometry:

$$f(\vec{r}) = \text{Re} \left\{ \iiint F(\vec{w}) e^{i2\pi(\vec{w} \cdot \vec{r})} d^3 w \right\} = \text{Re} \left\{ \int_0^\infty w^2 dw \int_0^\pi \sin \eta d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^\infty p(l, \theta, \eta) e^{i2\pi(\vec{w} \cdot \vec{r} - w l)} dl \right\} \quad (3)$$

where $(\vec{w}) = (w \sin \eta \cos \theta, w \sin \eta \sin \theta, w \cos \eta)$.

The algorithm defined by equation 3 shows significant differences with respect to those previously defined by equations 1 and 2. The integration in the variable η imposes requirements on the trajectory of the source-detector system, which does not meet the circular trajectory. However, there are approximation algorithms for volume reconstruction, which takes a circular path for the source-detector system, such as the FDK algorithm (Feldkamp-Davis-Kress), which provides good results for small beam openings.

Material and Methods

To simulate the process of image acquisition of the conventional CT equipments, a mechanical system was mounted in which the source-detector system stands fixed, while the sample rotates around its axis of rotation positioned at the center of a rotating table. The collected projections are the input data of the reconstruction algorithm implemented, in this case, the FDK algorithm.

An object consisting of 5 different materials, including air, acrylic, PVC, nylon and polyethylene was used for the calibration of the implemented MSCT system. From the chemical formula of each material that constitutes the object and the value of the effective energy of the X-ray beam produced by the equipment used, the values of their linear attenuation coefficient were calculated

using the XCOM program. Then we evaluated the performance of the system in the reconstruction of several sections of an object with a single scan, featuring a multi-slice tomographic reconstruction. For this, we used an object constructed in plastic with air bubbles randomly distributed in it. The acquisition system was constructed using a dental X-ray equipment, (Dabi Atlante, model Spectro 70X), a detection system (Dexis MVG-MedizinRechner), and a rotating table attached to a goniometer (Optrom).

Results

The half-value layer (HVL) for the X-ray equipment (Spectro 70X) was measured, resulting in 1.48 ± 0.03 mm of aluminum. This value was used to calculate the effective beam energy, which was 25 ± 1 keV.

Figure 7 presents the seven reconstructions shown in Table 1. Each figure presents the images with and without adjustment of window and level. All images were reconstructed with a resolution of 1024×1024 pixels in about 17 minutes.

Table 3 shows the values of the expected CT number of each material, together with their measured values of the reconstructed images. Each region of interest has an area of 16,000 pixels.

It was possible to verify the linearity of the system from the data presented in Table 3. Figure 8 presents graphs showing the linear regression of the values of the expected CT number over the measured values for the reconstruction 1. The other reconstructions showed similar results.

The results show excellent correspondence between the measured and expected values of CT number of each material. Another set of images shows the reconstructed images of 16 slices of the object with unknown geometry. In this case it was possible to verify the functioning of the MSCT System.

Discussion and Conclusion

The linearity of the implemented system was verified by the determination of the CT numbers of each material that makes up the object reconstructed. However, we verified a high attenuation of PVC, which resulted in a relatively high CT number value. In addition, there is the undesirable effect of beam hardening, which is intensified by very attenuating materials. This effect resulted in artifacts in the reconstructed images, which can be seen as lighter lines that originate in the center of the PVC cylinder and spread across the entire image.

From the reconstructed images for the different configurations, it was possible to study the image quality as a function of the number of projections and the thickness of the slices.

The results presented in Figure 9 show the ability of multi-slice reconstruction of the MSCT system implemented. The images show the differences between the reconstructed slices at different heights of the object.

The implemented system was able to reconstruct images of various sections of the objects and provide quantitative and qualitative information about the material composition of the reconstructed objects.

Introdução

A introdução da tomografia computadorizada por transmissão de raios X na medicina revolucionou o diagnóstico por imagens, primeiramente, por ter sido o primeiro sistema a produzir imagens totalmente digitalizadas com boa resolução espacial (em comparação com aquelas produzidas por técnicas de medicina nuclear). Além disso, nos equipamentos de tomografia, a sensibilidade a pequenas diferenças no coeficiente de atenuação dos tecidos é, pelo menos, dez vezes maior do que dos sistemas tela-filme utilizados na radiologia convencional (Kalender, 2006).

Um dos avanços mais recentes na tecnologia tomográfica foi a introdução dos equipamentos multicortes (*multi-slice computed tomography* – MSCT). Estes equipamentos possuem um diferencial fundamental com relação aos sistemas convencionais de corte único: utilizam uma matriz de detectores que permite a aquisição de projeções de vários cortes simultaneamente, o que possibilita a reconstrução de seções volumétricas do corpo do paciente.

O Brasil se encontra atualmente no grupo de países fabricantes e exportadores de equipamentos de diagnóstico por imagens, juntamente com Alemanha, Holanda, Estados Unidos, Israel e Japão, além de outros. Dados da Associação Brasileira da Indústria de Artigos e Equipamentos Médicos, Odontológicos, Hospitalares e de Laboratórios (ABIMO, 2006), têm mostrado um grande destaque desta produção quando empresas brasileiras participam de feiras no exterior. As empresas brasileiras agregaram tecnologias para a produção de equipamentos radiológicos convencionais, mamógrafos e sistemas para radiologia intervencionista, todos com boa aceitação clínica no Brasil e nos países para os quais estes equipamentos são exportados. Contudo, equipamentos de tomografia computadorizada não fazem parte do parque produtivo nacional atualmente.

O domínio da tecnologia para o desenvolvimento de sistemas de TC passa pela reunião de informações para a elaboração de algoritmos para reconstrução de imagens. Como a tecnologia atual vem sendo pautada pela tomografia *multi-slice*, o conhecimento e a aplicação de algoritmos desta natureza tornaram-se importantes marcos a serem atingidos pelos pesquisadores das áreas de física médica, engenharia biomédica e informática em saúde. Além disso, a melhoria dos padrões de utilização deste tipo de equipamento pode receber importantes aportes conceituais com o domínio da tecnologia de reconstrução destas imagens, com

possíveis consequências na melhoria da qualidade das informações clínicas resultantes. Esta abordagem está bastante clara no destaque que vem sendo dado aos trabalhos científicos encontrados na literatura (Schmidt *et al.*, 2005; Shih *et al.*, 2001; Tang *et al.*, 2006).

Sendo assim, o presente trabalho possui um caráter elucidativo, buscando desenvolver as bases do conhecimento necessário para a compreensão de todo o processo de reconstrução tomográfica multicortes, desde a aquisição de cada projeção, até a reconstrução das imagens. O trabalho não se limita ao desenvolvimento do aparato matemático necessário à elaboração dos cálculos para reconstrução das imagens, incluindo, também, a aplicação da teoria estudada na implementação de um sistema funcional de TCMC simplificado. Este, por sua vez, poderá ser utilizado para fins didáticos, em atividades de ensino da técnica tomográfica, contribuindo assim para a ampliação do *know-how* nacional para a futura produção de equipamentos deste tipo pela indústria brasileira.

Fundamentação matemática

Os métodos de reconstrução de imagens podem ser divididos basicamente em duas classes: métodos iterativos e métodos analíticos. No processo de reconstrução analítica tratam-se o objeto a ser reconstruído $f(\vec{r})$, que se caracteriza pela distribuição espacial do coeficiente de atenuação linear, e o conjunto de medidas $p_{\phi}(Y, Z)$, que caracteriza a projeção para cada posição angular Φ da fonte, como funções integráveis. Deste modo o problema de reconstrução é tratado em termos de equações integrais. A solução exata ou aproximada destas equações define dois grupos de algoritmos analíticos: algoritmos exatos ou algoritmos aproximados. Por último, é realizada a discretização, inerente ao processo de medições e fundamental para a implementação computacional.

Os métodos iterativos iniciam-se com uma hipótese sobre como é o objeto. Depois se compara esta hipótese com medidas obtidas, e ela é, então, modificada. Este processo é repetido várias vezes até que a suposta imagem esteja de acordo com os dados obtidos, dentro de uma incerteza definida inicialmente.

Em geral os algoritmos analíticos possuem um melhor desempenho que os iterativos. São mais compactos e exigem menos processamento de dados, o que os torna mais rápidos (Kalender, 2006). Dado o fato de que algoritmos analíticos são, atualmente, os métodos mais utilizados em tomografia computadorizada, a discussão que segue se limitará aos mesmos. O desenvolvimento matemático a seguir pode ser encontrado na literatura técnica sobre tomografia

computadorizada (Hsieh, 2003; Kalender, 2006; Parker, 1990; Seeram, 2009).

Existem tipos comuns de geometria que são tratados em reconstrução de imagens tomográficas. Os algoritmos de reconstrução estão baseados nas diversas geometrias dos feixes de raios X (Figura 1). Na geometria de feixe paralelo (*parallel beam*), usada nos primeiros tomógrafos comerciais, a fonte realiza dois movimentos, um de rotação e um de translação. Para cada posição angular da fonte, ela se move perpendicularmente à direção do feixe emitido, até varrer todo o objeto, e desse modo obter uma projeção.

As gerações seguintes de tomógrafos passaram a utilizar um feixe em leque (*fan beam*), com o intuito de eliminar o movimento translacional da fonte e, desse modo, economizar tempo de varredura, sem contar que é possível magnificar as projeções, possibilitando aumentar a resolução espacial das imagens reconstruídas e facilitar a identificação de estruturas menores. Seguindo o mesmo objetivo, passou-se a utilizar uma matriz de detectores e um feixe cônico (*cone beam*) e, desse modo, reconstruir imagens volumétricas, isto é, reconstruir vários cortes com uma só varredura.

Para o caso de um feixe paralelo, define-se a projeção $P_\Phi(Y)$ como a integral de linha de $f(\vec{\rho})$ sobre a trajetória do feixe que parte da fonte, na posição angular Φ , e passa por Y , como pode ser visto na Figura 2. Neste caso, $P_\Phi(Y)$ é definida por:

$$P_\Phi(Y) = \iint d^2\vec{\rho} f(\vec{\rho}) \cdot \delta(\vec{\rho} \cdot \hat{y}' - Y) \quad (1)$$

Considere a transformada de Fourier de $P_\Phi(Y)$:

$$Q_\Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\Phi(Y) e^{-i2\pi w Y} dY \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) resulta:

$$\begin{aligned} Q_\Phi(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint d^2\vec{\rho} f(\vec{\rho}) \delta(\vec{\rho} \cdot \hat{y}' - Y) e^{-i2\pi w Y} \right\} dY = \\ &= \iint d^2\vec{\rho} f(\vec{\rho}) e^{-i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \hat{y}')} \quad (3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) e^{-i2\pi(-xw \sin\Phi + yw \cos\Phi)} = F(w_x, w_y) \end{aligned}$$

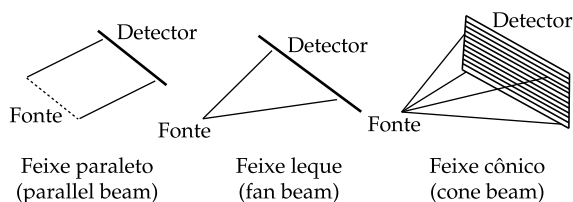


Figura 1. Geometrias do feixe de raios X em TC.
Figure 1. X-ray beam geometries in CT.

onde, $w_x = -w \sin\Phi$ e $w_y = w \cos\Phi$. Portanto, pode-se obter $f(\vec{\rho}) = f(x, y)$ a partir da transformação inversa da $F(\vec{w}) = F(w_x, w_y)$. Desse modo:

$$\begin{aligned} f(\vec{\rho}) &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{w} F(\vec{w}) e^{i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} = \\ &= \text{Re} \oint d\Phi \int_0^{\infty} dw w Q_\Phi(w) e^{i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} \quad (4) \end{aligned}$$

Mas nota-se que $Q_\Phi(-w) = F(-w, \Phi) = F(w, \Phi + \pi)$. Portanto, pode-se reescrever a equação 4, de forma que

$$\begin{aligned} f(\vec{\rho}) &= \text{Re} \left\{ \int_0^{\pi} d\Phi \int_0^{\infty} dw w F(w, \Phi) e^{i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi}^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} dw w F(w, \Phi) e^{i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \int_0^{\pi} d\Phi \int_0^{\infty} dw w F(w, \Phi) e^{i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} d\Phi \int_0^{\infty} dw w F(w, \Phi + \pi) e^{-i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \int_0^{\pi} d\Phi \int_0^{\infty} dw w F(w, \Phi) e^{i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} d\Phi \int_0^{\infty} dw w F(-w, \Phi) e^{-i2\pi w (\vec{\rho} \cdot \vec{y})} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\vec{\rho}) = \text{Re} \left[\int_0^{\pi} d\Phi \int_{-\infty}^{\infty} dw |w| F(w, \Phi) e^{i2\pi w (\vec{w} \cdot \vec{\rho})} \right] \\ &\hat{y}'(\Phi) = -\sin\Phi \hat{x} + \cos\Phi \hat{y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{y}'(\Phi + \pi) = \sin\Phi \hat{x} - \cos\Phi \hat{y} = -\hat{y}'(\Phi) \end{aligned} \quad (5)$$

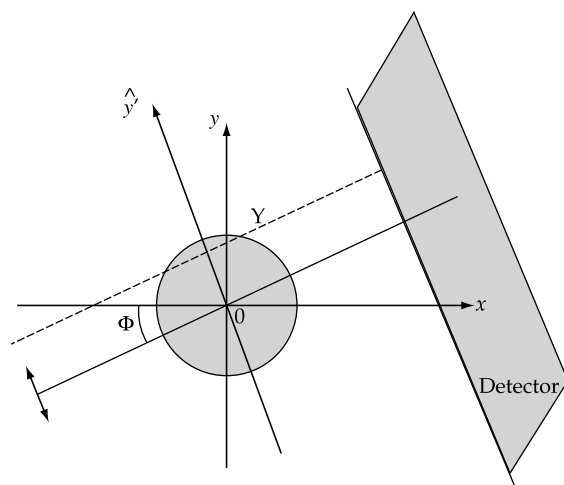


Figura 2. Esquema da projeção de um objeto na geometria de feixe paralelo.
Figure 2. Schematic projections of an object at the parallel beam geometry.

Sabendo-se que a transformada de Fourier obedece à propriedade $T^{-1}[f.g] = T^{-1}[f] * T^{-1}[g]$, pode-se ainda escrever a equação 5 na forma:

$$f(\vec{\rho}) = \int_0^{\pi} d\Phi K(Y) * P_{\Phi}(Y) \Big|_{Y=\vec{\rho}\cdot\hat{y}} \quad (6)$$

onde

$$K(Y) = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{i2\pi w Y} \right\} \quad (7)$$

Ou, simplesmente, substituindo a equação 2 na equação 4, obtém-se:

$$f(\vec{\rho}) = \text{Re} \left\{ \oint d\Phi \int_0^{\infty} P_{\Phi}(Y) \int_0^{\infty} w e^{i2\pi w(\vec{\rho}\cdot\hat{y}-Y)} dw dY \right\} \Rightarrow \Rightarrow f(\vec{\rho}) = \text{Re} \left\{ \oint \bar{K}(Y) * P_{\Phi}(Y) d\Phi \right\} \quad (8)$$

onde

$$\bar{K}(Y) = \text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} w e^{i2\pi w Y} \right\} \quad (9)$$

Nota-se que, por simetria:

$$\int_0^{\pi} d\Phi \bar{K}(Y) * P_{\Phi}(Y) \Big|_{Y=\vec{\rho}\cdot\hat{y}} = \int_{\pi}^{2\pi} d\Phi \bar{K}(Y) * P_{\Phi}(Y) \Big|_{Y=\vec{\rho}\cdot\hat{y}} \quad (10)$$

e pode-se ver também que:

$$\text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{i2\pi w Y} dw \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |w| \cos(2\pi w Y) dw \quad (11)$$

Uma vez que o integrando do lado direito da equação 11 é par, podem-se relacionar trivialmente as quantidades $K(Y)$ e $\bar{K}(Y)$ e, onde:

$$K(Y) = 2 \int_0^{\infty} w \cos(2\pi w Y) dw = \Rightarrow 2 \text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} w e^{i2\pi w Y} dw \right\} = 2\bar{K}(Y) \quad (12)$$

Substituindo as equações 10 e 12 nas equações 8 e 6, respectivamente, obtém-se:

$$f(\vec{\rho}) = \oint \bar{K}(Y) * P_{\Phi}(Y) d\Phi = 2 \int_0^{\pi} \bar{K}(Y) * P_{\Phi}(Y) d\Phi = \Rightarrow \int_0^{\pi} K(Y) * P_{\Phi}(Y) d\Phi = \frac{1}{2} \oint K(Y) * P_{\Phi}(Y) d\Phi \quad (13)$$

A equação 13 determina uma fórmula para obter a distribuição $f(\vec{\rho})$ a partir das suas projeções. Além disso, devido à simetria da geometria de feixe paralelo, fica evidente que a integração em Φ pode ser realizada no intervalo $(0, \pi)$. Sendo assim, teoricamente o sistema fonte-detector de um equipamento de TC com geometria de feixe paralelo só precisa coletar projeções num intervalo angular de 180° .

Para o caso de feixes em leque há duas configurações distintas na geometria. Numa delas, que é utilizada em praticamente todos os tomógrafos comerciais de corte único, o detector tem o formato de um arco de circunferência e é chamada de geometria em leque equiangular. Na outra configuração, o detector é reto, ou seja, seus elementos estão dispostos em uma linha reta, equidistantes entre si e, neste caso, tem-se a chamada geometria de feixe em leque equilinear. Os detectores disponíveis para a realização da etapa experimental do presente trabalho eram planos (*flat-panel*) e, portanto, exigem o uso da geometria equilinear. Sendo assim, a discussão que segue se limita a este caso.

Sem perda de generalidade, o detector plano pode ser representado por sua projeção no plano paralelo que contém o eixo de rotação do sistema fonte-detector. De agora em diante, referir-se-á ao plano do detector, como se fosse o plano contendo o eixo de rotação.

De maneira análoga à definição dada pela equação 1, pode-se definir (Figura 3):

$$p(l, \theta) = \iint d^2\vec{\rho} f(\vec{\rho}) \delta(\vec{\rho} \cdot \hat{l} - l) = \int_0^{\infty} d\rho \rho \oint d\phi f(\rho, \phi) \delta(\rho \cos(\theta - \phi) - l) \quad (14)$$

e seja $q(w, \theta)$ a transformada de Fourier de $p(l, \theta)$. Então:

$$q(w, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} dl p(l, \theta) e^{-i2\pi w l} = \int_0^{\infty} d\rho \rho \oint d\phi f(\rho, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} dl \delta(\rho \cos(\theta - \phi) - l) e^{-i2\pi w l} = \int_0^{\infty} d\rho \rho \oint d\phi f(\rho, \phi) e^{-i2\pi w \rho \cos(\theta - \phi)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) e^{-i2\pi(xw_x + yw_y)} = F(w_x, w_y) \quad (15)$$

onde, $w_x = w \cos(\theta)$, $w_y = w \sin(\theta)$, $x = \rho \cos(\phi)$ e $y = \rho \sin(\phi)$.

Portanto, pode-se escrever:

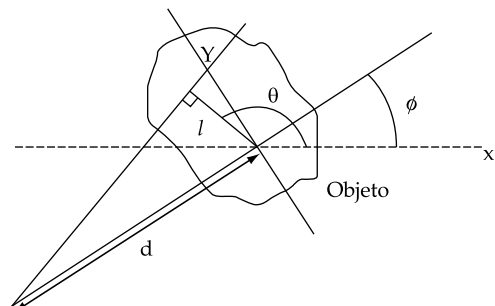


Figura 3. Parâmetros da geometria de feixe em leque.
 Figure 3. Geometric parameters of a fan beam.

$$f(\vec{\rho}) = \text{Re} \left\{ \oint d\theta \int_0^\infty w dw q(w, \theta) e^{i2\pi w l} \Big|_{l=\vec{\rho} \cdot \hat{l}} \right\} \quad (16)$$

Substituindo (15) em (16), fica:

$$f(\vec{\rho}) = \oint d\theta \text{Re} \left\{ \int_0^\infty dw w \int_{-\infty}^\infty dl p(l, \theta) e^{i2\pi w [\vec{\rho} \cdot \hat{l} - l]} \right\} \quad (17)$$

Na equação 17 é definida uma fórmula para obter a função $f(\vec{\rho})$ a partir de suas projeções $p(l, \theta)$. Porém, nota-se que os parâmetros l e θ são dependentes do ângulo Φ e do ângulo de abertura de cada trajetória dos fótons que compõem o feixe, o que torna mais complicada a implementação prática desse algoritmo. Porém é possível, a partir de uma transformação de coordenadas (Feldkamp *et al.*, 1984), reescrever a equação 17 em função dos parâmetros Φ e Y .

Para o caso de um feixe cônico, é possível reconstruir vários cortes de um objeto em uma única varredura. Nesta configuração passa-se a considerar a geometria cônica do feixe de raios X, de modo que a radiação atenuada pelo objeto a ser reconstruído atinja todo o detector. A dedução da fórmula de reconstrução para a esta geometria é bem semelhante àquela para a geometria de feixe em leque. Pode-se mostrar que, para algumas trajetórias da fonte, que respeitem as condições de Tuy (1983), é possível realizar a reconstrução analítica exata das imagens.

Como pode ser visto na Figura 4, escrevendo o vetor unitário \hat{l} em coordenadas esféricas, e o vetor posição \vec{r} em coordenadas cilíndricas, ambos na base $\{\hat{z}, \hat{y}, \hat{x}\}$, obtêm-se $\hat{l} = (\text{sen}\eta \text{cos}\theta, \text{sen}\eta \text{sen}\theta, \text{cos}\theta)$ e $\vec{r} = (r \text{cos}\phi, r \text{sen}\phi, z)$. De maneira totalmente análoga ao que foi feito para a geometria *fan beam*, pode-se deduzir uma fórmula de reconstrução para a geometria cônica do feixe.

Define-se:

$$p(l, \theta, \eta) = \iiint d^3\vec{r} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} \cdot \hat{l} - l) \quad (18)$$

ou seja

$$q(w, \theta, \eta) = \int_{-\infty}^\infty dl p(l, \theta, \eta) e^{-i2\pi w l} = \iiint d^3\vec{r} f(\vec{r}) e^{-i2\pi w [r \text{sen}\eta (\text{cos}\theta \text{cos}\phi + \text{sen}\theta \text{sen}\phi) + z \text{cos}\eta]} = F(\vec{w}) \quad (19)$$

onde $\vec{w} = (w \text{sen}\eta \text{cos}\theta, w \text{sen}\eta \text{sen}\theta, w \text{cos}\eta)$. Logo, o valor do coeficiente de atenuação linear em qualquer objeto pode ser representado por:

$$f(\vec{r}) = \text{Re} \left\{ \iiint d^3\vec{w} F(\vec{w}) e^{i2\pi(\vec{w} \cdot \vec{r})} \right\} = \text{Re} \left\{ \int_0^\infty w^2 dw \int_0^\pi \text{sen}\eta d\eta \oint d\theta \int_{-\infty}^\infty dl p(l, \theta, \eta) e^{i2\pi(\vec{w} \cdot \vec{r} - wl)} \right\} \quad (20)$$

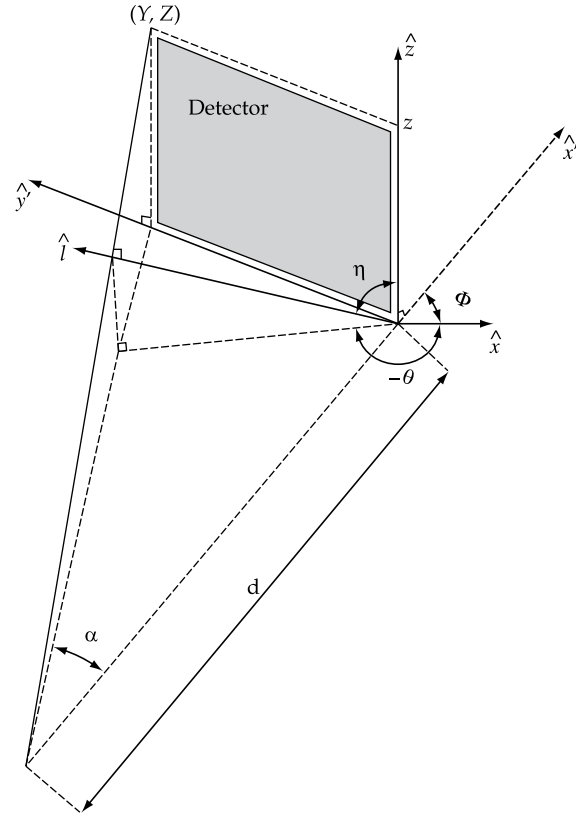


Figura 4. Parâmetros da geometria de feixe cônico.
Figure 4. Geometric parameters of a cone beam.

O algoritmo definido pela equação 20 apresenta diferenças significativas com relação àqueles definidos anteriormente pelas equações 13 e 17. A integração na variável η definida na Figura 4 impõe exigências sobre a trajetória do sistema fonte-detector, que não são satisfeitas, em particular, pela trajetória circular. Há, porém, algoritmos aproximados para a reconstrução volumétrica, onde se considera uma trajetória circular para o sistema fonte-detector, como por exemplo, o algoritmo FDK (Feldkamp *et al.*, 1984), que apresenta bons resultados para pequenas aberturas de feixe.

O algoritmo FDK é um algoritmo analítico aproximado de reconstrução para feixe cônico, que se consagrou como base dos algoritmos mais utilizados atualmente em equipamentos tomográficos comerciais (Kalender, 2006). A formulação que segue é válida apenas para uma trajetória circular da fonte de raios X. Existem, porém, generalizações desse algoritmo para trajetórias não planares, como as utilizadas na tomografia helicoidal.

Para descrever adequadamente o algoritmo FDK é interessante reescrever a equação 17 nas coordenadas $\{\Phi, Y\}$, definidas na Figura 3. Pode-se ver que:

$$l = \frac{dY}{(Y^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}, \theta = \Phi + \alpha + \frac{\pi}{2} \Rightarrow dl d\theta = \left| \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial \Phi} \right| dY d\Phi = \frac{d^3}{(d^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}} dY d\Phi \quad (21)$$

Portanto,

$$f(\vec{r}) = \oint d\Phi \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty dw w \int_{-\infty}^\infty dY P_\Phi(Y) \frac{d^3}{(d^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}} e^{i2\pi w \left[r \cos(\Phi + \alpha + \frac{\pi}{2} - \varphi) - \frac{Yd}{(d^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]} \right\} \quad (22)$$

Fazendo a mudança de variáveis $W = \frac{[d + r \cos(\phi - \Phi)]_w}{(d^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}}$, que no fundo é uma mudança de escala da frequência espacial w , obtém-se:

$$f(\vec{r}) = \oint d\Phi \frac{d^2}{[d + r \cos(\phi - \Phi)]^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty W dW \int_{-\infty}^\infty dY \frac{d}{(d^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}} P_\Phi(Y) e^{i2\pi W \left[\frac{d \cdot r \cos(\phi - \Phi)}{d + r \cos(\phi - \Phi)} - Y \right]} \right\} \quad (23)$$

Note que $Y(\vec{r}) = \frac{dr \operatorname{sen}(\phi - \Phi)}{d + r \cos(\phi - \Phi)}$ é a posição onde o feixe que passa por \vec{r} corta o eixo Y . Finalmente, obtém-se:

$$f(\vec{r}) = \oint d\Phi \frac{d^2}{[d + \vec{r} \cdot \hat{x}]^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty W dW \int_{-\infty}^\infty dY \frac{d}{(d^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}} P_\Phi(Y) e^{i2\pi W [Y(\vec{r}) - Y]} \right\} \quad (24)$$

A idéia básica do algoritmo FDK é aproximar a contribuição de um incremento de rotação $\delta\Phi'$, da fonte no plano que contém os vetores unitários \hat{m} e \hat{n} por um incremento associado de rotação $\delta\Phi$, da fonte no plano xy .

A partir da equação 24 é possível determinar a contribuição incremental δf devido a uma rotação $\delta\Phi'$ no plano inclinado, que vem dada por:

$$\delta f(\vec{p}' + Z\hat{z}) = \delta\Phi' \frac{d^2}{(d' + \vec{p}' \cdot \hat{m})^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty w W dW \int_{-\infty}^\infty dY \frac{d'}{(d'^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}} P_\Phi(Y, Z) e^{i2\pi W \left(\frac{d' \vec{p}' \cdot \hat{n}}{d' + \vec{p}' \cdot \hat{m}} - Y \right)} \right\} \quad (25)$$

Mas note que $\vec{p}' \cdot \hat{m} = \vec{r} \cdot \hat{x}' \frac{d'}{d}$, $\vec{p}' \cdot \hat{n} = \vec{r} \cdot \hat{n}$,

$$d' = (d^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}, Z(\vec{r}) = \frac{z \cdot d}{d + \vec{r} \cdot \hat{x}'}, Y(\vec{r}) \equiv Y_r = \frac{d\vec{r} \cdot \hat{n}}{d + \vec{r} \cdot \hat{x}'}$$

e que, em primeira ordem,

$$\delta \hat{m} = \hat{k} \times \hat{m} \delta\Phi' = \hat{z} \times \hat{m} \delta\Phi' \Rightarrow \delta\Phi' = \frac{d}{(d^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} \delta\Phi \quad (26)$$

Substituindo esses dados na equação 25, é obtida a seguinte equação para δf :

$$\delta f(\vec{r}) = \delta\Phi \frac{d^2}{(d + \vec{r} \cdot \hat{x}')^2} \int_0^\infty W dW \int_{-\infty}^\infty dY \frac{d}{(d^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (27)$$

$$P_\Phi(Y, Z) e^{i2\pi W(Y(\vec{r}) - Y)}$$

Agora, para encontrar $f(\vec{r})$, simplesmente somam-se os incrementos $\delta f(\vec{r})$ sobre todas as projeções. Portanto,

$$f(\vec{r}) = \oint d\Phi \frac{d^2}{(d + \vec{r} \cdot \hat{x}')^2} \int_0^\infty W dW \int_{-\infty}^\infty dY \frac{d}{(d^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (28)$$

$$P_\Phi(Y, Z) e^{i2\pi W(Y - Y)}$$

A equação 28 pode ser escrita na forma simplificada:

$$f(\vec{r}) = \oint d\Phi \frac{d^2}{(d + \vec{r} \cdot \hat{x}')^2} \tilde{P}_\Phi(Y(r), Z(r)) \quad (29)$$

onde,

$$\tilde{P}_\Phi(Y, Z) = \int_{-\frac{\Delta Y}{2}}^{\frac{\Delta Y}{2}} g_y(Y - Y') P_\Phi(Y', Z') \frac{d}{(d^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}} dY' \quad (30)$$

$$g_y(Y) = \operatorname{Re} \int_0^{w_{y,0}} dW W e^{i2\pi W Y} \quad (31)$$

e

$$W_{y,0} = \frac{\pi}{\Delta Y} \quad (32)$$

Note que o tamanho finito do detector limita os valores da frequência em $W = \frac{\pi}{\Delta Y}$, onde $\Delta Y = Y_i - Y_{i-1}$ é a dimensão de cada elemento do detector, e N é o número de elementos do detector.

Analisando-se as equações 28 e 30, fica claro que o algoritmo FDK é do tipo retro-projeção filtrada (FBP), onde $\tilde{P}_\Phi(Y(\vec{r}), Z(\vec{r}))$ é a projeção $P_\Phi(Y(\vec{r}), Z(\vec{r}))$ filtrada (equação 30), e a integral em Φ (equação 29) representa a retro-projeção de todas as projeções filtradas.

Na prática, $P_\Phi(Y, Z)$ é amostrado para um conjunto finito de valores discretos de Φ , Y e Z . Para efetuar a discretização da equação 28, considera-se que $P_\Phi(Y, Z)$ varia bem mais lentamente que $g_y(Y)$, de modo que possa ser considerado constante em cada intervalo ΔY . Sendo assim,

$$\tilde{P}_\Phi(Y_j, Z_k) = \sum_j P_\Phi(Y_j, Z_k) \cos \phi_{j,k} \int_{Y_j - \frac{\Delta Y}{2}}^{Y_j + \frac{\Delta Y}{2}} dY g_y(Y_j - Y) \quad (33)$$

$$\text{onde } \cos \phi_{j,k} = \frac{d}{(d^2 + Y_j'^2 + Z_k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

A fórmula final de reconstrução é dada por:

$$f(\vec{r}) = \sum_i \Delta\Phi \frac{d^2}{(d + \vec{r} \cdot \hat{x}')^2} \tilde{P}_\Phi(Y_r, Z_k) \quad (34)$$

Os valores de $\hat{P}_\Phi(Y_r, Z_k)$ são calculados por interpolação linear entre os elementos da matriz $\hat{P}_\Phi(Y_j, Z_k)$.

Na aplicação da técnica de tomografia computadorizada para imagens clínicas de humanos, os níveis de restrição de dose limitam a densidade de fótons dos feixes de raios X. Considerando o intervalo de tempo cada vez menor disponível para a aquisição de cada projeção, e os fenômenos de absorção e espalhamento de uma parte considerável dos fótons emitidos, pode-se dizer que o fluxo de fótons de raios X que atinge o detector é, em muitos casos, relativamente pequeno. Assumindo que a variação do fluxo de fótons detectados segue aproximadamente uma distribuição de Poisson, pode-se dizer que quanto menor o fluxo de fótons detectado, maior é a variação no sinal. Estes fatos caracterizam a densidade limitada de fótons nos feixes de raios X como uma das fontes predominantes de ruído nas imagens (Kalender, 2006).

A maior parte do ruído ocorre durante o processo de medição das projeções. O seguinte modelo descreve o processo de aquisição das projeções com ruído:

$$P_\Phi(Y, Z) = A\{\mu(\vec{r})\} + n(Y, Z) \quad (35)$$

onde $P_\Phi(Y, Z)$ é a projeção medida, $A\{\cdot\}$ é o operador de projeção, $\mu(\vec{r})$ é a distribuição espacial do coeficiente de atenuação linear do objeto, e $n(Y, Z)$ representa a contribuição do ruído em cada canal do detector.

O ruído em uma imagem radiográfica digital é bem determinado a partir da razão sinal ruído (*Signal to Noise Ratio – SNR*) do detector que, quando bem conhecida, possibilita uma grande redução dos efeitos do ruído nas imagens (Parker, 1990).

Nos algoritmos de retro-projeção filtrada, a distribuição $\mu(\vec{r})$ é dada por:

$$\mu(\vec{r}) = B\{h(Y_r) * P_\Phi(Y_r, Z)\} \quad (36)$$

onde $B\{\cdot\}$ é o operador de retro-projeção e $h(Y_r)$ é o filtro utilizado no processo de filtração da projeção. Reescrevendo o lado direito da equação 36 no espaço de frequências, fica:

$$\begin{aligned} \mu(\vec{r}) &= B\{\mathcal{F}^{-1}[H(w) \cdot Q_\Phi(w, Z)]\} = \\ &= B\{\mathcal{F}^{-1}[H(w) \cdot [\hat{Q}_\Phi(w, Z) + N(w, Z)]]\} \end{aligned} \quad (37)$$

onde $\hat{Q}_\Phi(w, Z)$ é a transformada de Fourier da projeção sem ruído $\hat{P}_\Phi(Y, Z)$.

Aplicando os resultados da equação 13, pode-se reescrever a equação 28 na forma:

$$\begin{aligned} \oint d\Phi \frac{d^2}{(d + \vec{r} \cdot \hat{x}')^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} dY \bar{P}_\Phi(Y, Z) e^{i2\pi w(Y_r - Y)} = \\ = \oint d\Phi \frac{d^2}{(d + \vec{r} \cdot \hat{x}')^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dw |w| \bar{Q}_\Phi(Y, Z) e^{i2\pi w Y} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{onde } \bar{P}_\Phi(Y, Z) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + Y^2 + Z^2}} P_\Phi(Y, Z) \text{ e}$$

$$\bar{Q}_\Phi(w, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} dY \bar{P}_\Phi(Y, Z) e^{-i2\pi w Y}.$$

Portanto, para projeções sem ruído, o filtro $H(w)$ é facilmente identificado na equação 36 como $H(w) = |w|$, e é chamado de filtro rampa devido a sua forma.

A equação 38 define um algoritmo de reconstrução equivalente ao algoritmo FDK, porém o processo de filtração ocorre no espaço de frequências. Neste algoritmo FDK modificado (Parker, 1990), ao invés de se realizar a convolução nas coordenadas espaciais da projeção com a transformada inversa de Fourier do filtro rampa, é efetuada a multiplicação no espaço de frequências do filtro rampa pela transformada de Fourier da projeção, seguida da transformada inversa do produto. Para projeções ideais, isto é, sem ruído, tem-se esquematicamente que:

$$\mu = B\{\mathcal{F}^{-1}[Q_\Phi(w) \cdot |w|]\} \quad (39)$$

Para projeções ruidosas, a equação 39 é modificada e fica da seguinte forma:

$$\tilde{\mu} = B\{\mathcal{F}^{-1}[(\hat{Q}_\Phi(w) + N(w)) \cdot H]\} \quad (40)$$

$H(\hat{Q}_\Phi(w) + N(w))$ deve se aproximar o máximo possível de $|w| Q_\Phi(w)$, onde, $\hat{Q}_\Phi(w)$ é a transformada de Fourier da projeção ideal $P_\Phi(Y)$.

O filtro H , ideal para o modelo descrito, é dado por:

$$H(w) = |w| \frac{1}{1 + w^2 SNR^{-1}} \quad (41)$$

que é uma modificação do filtro rampa, na qual para pequenos valores de frequência, $H(w) \approx |w|$, e para valores mais altos de frequência $H(w) \approx \frac{SNR}{|w|}$,

onde SNR é a razão sinal ruído das projeções.

Num sistema ideal, o filtro rampa resulta na reconstrução exata do corte central. Num sistema real, com projeções ruidosas, a súbita transição na frequência de corte w_{y_0} gera um padrão oscilatório nas projeções filtradas, resultando em artefatos de anel na imagem reconstruída.

A utilização do algoritmo FDK modificado, utilizada no presente trabalho, é muito vantajosa para a reconstrução a partir de projeções ruidosas, quando se deve utilizar o filtro rampa modificado, pois a representação de H nas coordenadas espaciais é muito complicada, enquanto que no espaço de frequências é relativamente simples como se pode ver pela equação 41.

Foi implementado um método para diminuir a produção de artefatos de *aliasing*, intrínseca ao processo de aquisição das projeções. Tal método consiste na aplicação das condições de amostragem de Nyquist-Shannon (Hsieh, 2003; Kalender *et al.*, 1989). A re-amostragem das projeções coletadas foi feita de modo que cada pixel das projeções modificadas tenha uma largura múltipla da dos pixels das projeções originais. O intervalo entre cada pixel da nova matriz de imagem re-amostrada deve ser o mesmo da matriz original.

Materiais e Métodos

Para simular o processo de aquisição de imagens dos equipamentos de TC convencionais, foi montado um sistema mecânico no qual o conjunto fonte-detector fica imóvel, enquanto a amostra gira em torno do seu eixo de rotação, fixado no centro de uma plataforma giratória. Realiza-se a medição de uma projeção por cada posição angular da amostra. Cada projeção é arquivada com sua posição angular correspondente. As projeções coletadas são os dados de entrada do algoritmo de reconstrução de imagens implementado.

Um dos fatores determinantes na qualidade das projeções foi a técnica radiográfica utilizada, determinada pela tensão (kV) aplicada ao tubo, pela corrente (mA) que atinge o alvo do tubo e pela filtração na saída da cúpula do equipamento de raios X. A escolha da técnica radiográfica consistiu em balancear corretamente a tensão, a filtração e a corrente do tubo, de modo que as projeções coletadas apresentassem o melhor contraste e resolução espacial possíveis para o sistema fonte-detector disponível.

Para garantir a precisão geométrica do sistema de aquisição de imagens, foi necessário alinhar o sistema fonte-detector, de modo que a reta que passa pelo ponto focal do tubo e o centro do detector seja perpendicular ao plano do detector e paralela ao plano de rotação do objeto a ser reconstruído. Para que as projeções constituam um conjunto de dados consistente, é necessário que haja precisão nas medidas angulares da rotação do objeto a ser reconstruído, que

foi obtida com o auxílio do goniômetro acoplado à mesa giratória.

Um objeto simulador foi projetado especificamente para calibrar o sistema de TCMC implementado. Este objeto foi fabricado na oficina mecânica do Instituto de Eletrotécnica e Energia da Universidade de São Paulo e é composto por um cilindro sólido de acrílico com 20 mm de diâmetro e outros quatro cilindros sólidos com 4 mm de diâmetro, sendo: um de PVC, um de náilon e dois de polietileno com densidades diferentes. Todos os cilindros têm 25 mm de altura. O cilindro de acrílico contém 5 furos passantes paralelos de 4 mm de diâmetro cada, nos quais são inseridos os quatro outros cilindros. Cada cilindro preenche completamente 4 dos furos passantes do cilindro de acrílico, sobrando um deles com ar. A Figura 5a mostra o objeto montado. Foi também utilizado um objeto não homogêneo e geometricamente assimétrico (Figura 5b). Este objeto é construído em material plástico com bolhas de ar aleatoriamente distribuídas em seu interior. Neste caso, o principal objetivo era identificar as diferenças nas imagens reconstruídas dos diferentes cortes do objeto, a fim de avaliar o desempenho do sistema na reconstrução de vários cortes com uma única varredura, caracterizando uma reconstrução tomográfica multicortes. Cada objeto foi reconstruído a partir de 720 projeções com um intervalo angular de $0,5^\circ$ entre cada uma.

O objeto foi posicionado e fixado no centro de uma plataforma giratória por um suporte de acrílico, especificamente fabricado para este fim. O sistema de aquisição de projeções (Figura 6) foi montado utilizando um equipamento de raios X de uso odontológico, (Dabi Atlante, modelo Spectro 70X), e um sistema de detecção baseado em um sensor do tipo *Charge-Coupled Device* – CCD (MVG-MedizinRechner, modelo Dexis 601 P – *Portable digital X-ray Sensor System*). O equipamento de raios X utiliza anodo de tungstênio com ângulo de 20° e pode ser acionado com potência de 1,2 kVA. A tensão nominal de operação é de $70 \text{ kV} \pm 10\%$ e a corrente anódica de $8 \text{ mA} \pm 20\%$. A filtração total era de 2,86 mm de alumínio.

O detector, originalmente projetado para aplicações em imagens odontológicas, é composto por um detector sensível aos raios X, uma placa de aquisição de dados e um *software* de aquisição de dados (Doors Software International, Ltd). As características do sensor digital Dexis 601 P são:

- Tamanho do sensor: $38,8 \times 29,8 \times 9,0 \text{ mm}$;
- Área sensível do sensor: $32,0 \times 25,6 \text{ mm}$;
- Matriz: $800 \times 640 \text{ pixel}$
- Tamanho do pixel: $40 \times 40 \mu\text{m}$

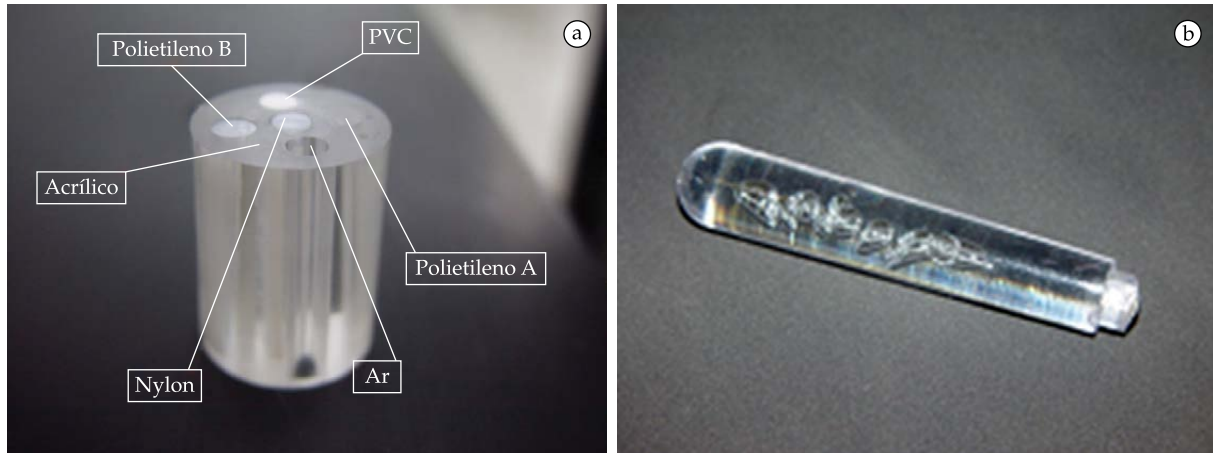


Figura 5. (a) Objeto simulador que foi usado na calibração do sistema de TC simplificado implementado; (b) Objeto não homogêneo e sem simetria cilíndrica constituído por um material plástico com bolhas de ar distribuídas em seu interior.
Figure 5. (a) Phantom used at the calibration of the simplified CT system; (b) Inhomogeneous phantom without cylindrical symmetry composed by a plastic material with air bubbles distributed inside.

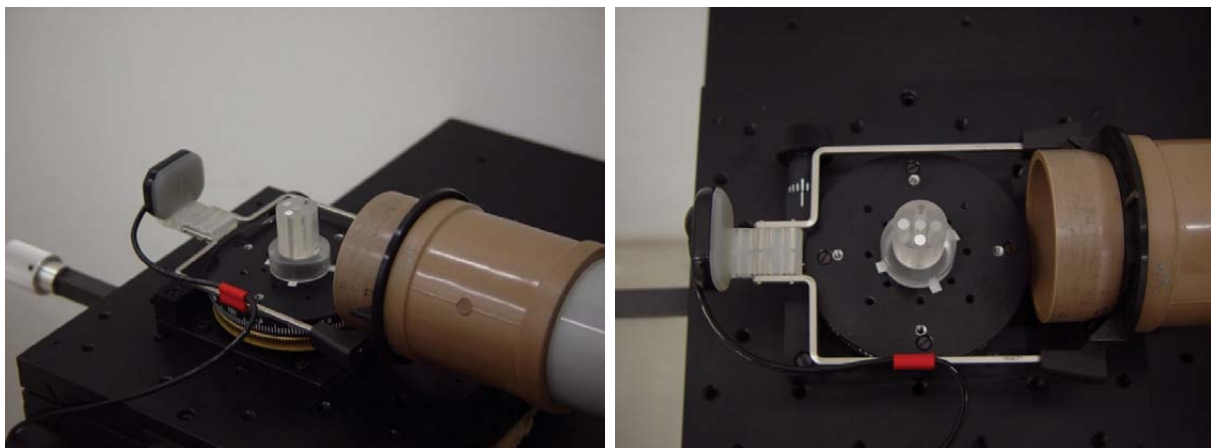


Figura 6. Sistema de aquisição de imagens montado com o equipamento de raios X odontológico e o sistema de detecção Dexis. **Figure 6.** Image acquisition system mounted with the dental X-ray machine and the Dexis detection system.

As projeções apresentaram qualidade adequada em termos de sua relação sinal-ruído ($SNR = 25$), para a proposta de implementação do algoritmo quando foi utilizado o tempo mínimo de exposição do equipamento, que é de 0,2 s.

O algoritmo FDK admite uma órbita circular para a trajetória da fonte de raios X e pode ser estendido para órbitas helicoidais. Essas órbitas não respeitam as condições de Tuy (1983) e, portanto, impossibilitam a reconstrução exata. No entanto, devido à sua simplicidade e aos bons resultados obtidos, este algoritmo é a base de quase todos os algoritmos usados em equipamentos de tomografia computadorizada atualmente.

Num algoritmo de retro-projeção filtrada, como o FDK, as etapas podem ser descritas, para cada posição angular do conjunto fonte-detector, da seguinte maneira:

Aquisição da projeção – Nesta etapa é coletada a projeção do objeto a ser reconstruído. Os raios X emitidos pela fonte são atenuados ao atravessarem o objeto e, em seguida, detectados por um detector digital.

Filtração – A projeção adquirida é filtrada, ou seja, é realizada a operação de convolução da projeção com uma “função filtro”.

Retro-projeção – Nesta última etapa a projeção resultante da filtração é retro-projetada sobre a matriz

da imagem, isto é, o valor da projeção convoluída em cada ponto do detector é superposto sobre todo o trajeto dos raios X que atingiram este ponto.

As etapas são repetidas para cada ângulo de projeção. A superposição de todas as retro-projeções filtradas tem como resultado a matriz da imagem final. As etapas 2 e 3 podem ser realizadas enquanto o sistema adquire a próxima projeção. Esta é uma grande vantagem desse tipo de algoritmo, pois economiza tempo no processo real da reconstrução tomográfica. No presente trabalho, este algoritmo foi implementado utilizando-se o *software* MATLAB® versão 6.5 DEMO.

Foram incorporadas ao algoritmo algumas correções de artefatos relacionados ao processo de medição das projeções, tais como a alteração do filtro utilizado na etapa que precede a retroprojeção, para aumentar a razão sinal ruído das imagens e uma correção digital da centralização do sistema de aquisição das projeções.

A alteração do filtro foi realizada conforme descrito no pseudocódigo apresentado a seguir, que descreve a implementação do algoritmo FDK modificado.

Pseudocódigo – Implementação do algoritmo FDK modificado:

LER I, J, K, d, D, T, N, M, SNR, ΔX;

$\mu_{n,m,t} \leftarrow 0$;

PARA $i \leftarrow 1$ ATÉ I, FAZ

LER P_{Φ_i} ;

PARA $j \leftarrow 1$ ATÉ J, FAZ

PARA $k \leftarrow 1$ ATÉ K, FAZ

$$\bar{P}_{\Phi_i}(Y_j, Z_k) \leftarrow \frac{d}{(d^2 + Y_j^2 + Z_k^2)^{\frac{1}{2}}} P_{\Phi_i}(Y_j, Z_k);$$

FIM PARA

FIM PARA

PARA $j \leftarrow 1$ ATÉ J, FAZ

SE $j \leq \frac{J}{2}$, ENTÃO

$$w_{j+\frac{J}{2}} \leftarrow 2\pi \left(\frac{-J+1}{2Y} + \frac{j-1}{Y} \right);$$

SENÃO

$$w_{j-\frac{J}{2}} \leftarrow 2\pi \left(\frac{-J+1}{2Y} + \frac{j-1}{Y} \right);$$

FIM SE

FIM PARA

PARA $j \leftarrow 1$ ATÉ J, FAZ

$$WR_j \leftarrow |w_j| \frac{SNR}{SNR + w_j^2};$$

FIM PARA

PARA $k \leftarrow 1$ ATÉ K, FAZ

$$FP_{\Phi_i}(k, :) \leftarrow FFT(P_{\Phi_i}(k, :)) WR_j;$$

$$C_{\Phi_i}(k, :) = \Re(IFTT(FP_{\Phi_i}(k, :)));$$

FIM PARA

PARA $t \leftarrow 1$ ATÉ T, FAZ

PARA $n \leftarrow 1$ ATÉ N, FAZ

PARA $m \leftarrow 1$ ATÉ M, FAZ

$$Y_r \leftarrow \frac{D(-x_n \sin(\Phi_i) + y_m \cos(\Phi_i) - \Delta X)}{d + x_n \cos(\Phi_i) + y_m \sin(\Phi_i)};$$

$$Z_r \leftarrow \frac{D.z_i}{d + x_n \cos(\Phi_i) + y_m \sin(\Phi_i)};$$

$$\mu_{n,m,t} \leftarrow \mu_{n,m,t} +$$

$$+ \frac{Dd}{(d + x_n \cos(\Phi_i) + y_m \sin(\Phi_i))^2} C_{\Phi_i}(Y_r, Z_r) \cdot \Delta \Phi^i;$$

FIM PARA

FIM PARA

FIM PARA

FIM PARA

PARA $t \leftarrow 1$ ATÉ T, FAZ

PARA $n \leftarrow 1$ ATÉ N, FAZ

PARA $m \leftarrow 1$ ATÉ M, FAZ

$$nCT_{n,m,t} \leftarrow \frac{(\mu_{n,m,t} - \mu_{\text{agua}})}{\mu_{\text{agua}}} 1000;$$

FIM PARA

FIM PARA

FIM PARA

Neste pseudocódigo SNR é a razão sinal ruído do detector, $FP_{\Phi_i}(k, :)$, $P_{\Phi_i}(k, :)$ e $C_{\Phi_i}(k, :)$ representam os vetores formados pelas linhas k das matrizes FP_{Φ_i} , P_{Φ_i} e C_{Φ_i} , e FFT e $IFTT$ representam, respectivamente, a transformada rápida de Fourier e sua inversa.

A fim de avaliar o resultado da aplicação desta correção, determinou-se o ruído presente nas imagens reconstruídas com e sem a correção. Para isto, determinou-se o desvio padrão do valor médio dos números CT de uma determinada área sobre a imagem de um dos materiais componentes do objeto reconstruído, neste caso, o acrílico. Assumiu-se que o ruído presente nas imagens é diretamente proporcional ao desvio padrão.

Além disso, alguns artefatos circulares apareceram nas imagens iniciais devido à perda de centralização geométrica do sistema. Supondo que esse era o problema que resultou nos artefatos nas imagens reconstruídas, inseriu-se uma variável ΔX de deslocamento na posição do ponto focal, e substituiu-se, no algoritmo implementado, $Y_r = \bar{Y}_r$, onde

$$\bar{Y}_r = \frac{D(\bar{F} \cdot \hat{Y} - \Delta X)}{d + \bar{F} \cdot \hat{x}'} \quad (42)$$

O valor de ΔX foi, então, variado até que as imagens dos cortes dos cilindros apareçam como um disco o mais homogêneo e perfeito possível.

Resultados

O algoritmo FDK foi implementado e foram geradas imagens reconstruídas a partir das projeções de dois diferentes objetos simuladores. Estas projeções foram obtidas com o sistema de aquisição de imagens montado.

Os resultados da reconstrução primeiro objeto simulador cilíndrico (Figura 5a) possibilitaram verificar a linearidade do sistema e, conseqüentemente, calibrá-lo. Na reconstrução do objeto com bolhas de ar, apresentado na Figura 5b, foi testada a capacidade de reconstrução tomográfica multicortes do sistema.

Reconstrução do objeto simulador cilíndrico

Foram reconstruídas, ao todo, sete imagens do corte central do objeto simulador cilíndrico. Em cada reconstrução variou-se um parâmetro importante como: número de projeções, espessura do corte, e o tamanho dos elementos da re-amostragem (correção de *aliasing*). A Tabela 1 mostra os parâmetros usados em cada reconstrução.

Tabela 1. Parâmetros usados em cada reconstrução realizada, a partir das projeções coletadas com o sistema de aquisição. **Table 1.** Parameters used at the image reconstructions from projections acquired using the acquisition system.

Número da Reconstrução	Número de Projeções	Espessura do corte (mm)	Aplicação da correção de <i>aliasing</i>
nº 1	180 (0,2 π)	1,00	Sem correção
nº 2	360 (0,2 π)	1,00	Sem correção
nº 3	720 (0,2 π)	1,00	Sem correção
nº 4	720 (0,2 π)	0,50	Sem correção
nº 5	720 (0,2 π)	0,25	Sem correção
nº 6	720 (0,2 π)	1,00	Com correção
nº 7	720 (0,2 π)	3,00	Com correção

Todas as imagens foram reconstruídas com o algoritmo FDK modificado. Para a razão sinal ruído das projeções utilizou-se o valor $SNR = 25$, conforme especificado pelo fabricante do detector.

Na Figura 7 são apresentadas as sete reconstruções indicadas na Tabela 1. Em cada figura são apresentadas somente as imagens com ajuste de janela e nível. Todas as imagens foram reconstruídas com uma resolução de 1024 x 1024 pixels em aproximadamente 17 minutos, utilizando-se um computador pessoal com processador Pentium® XEON™ 3.0. As imagens reconstruídas foram analisadas com o auxílio do *software* ImageJ (National Institute of Health, 2009). Foram obtidas as curvas de perfil de cada imagem reconstruída e foram determinados os valores de número CT de cada material que compõe o objeto reconstruído. Além disso, foi realizada a comparação do ruído presente em cada imagem.

Foi estimada a camada semi-redutora (CSR) para o equipamento de raios X (Spectro 70X) como sendo 1,48 ± 0,03 mm de alumínio. Este valor foi usado para calcular a energia efetiva do feixe, de 25 ± 1 keV. A partir da fórmula química dos materiais que compõem o objeto cujas imagens foram reconstruídas, calcularam-se os valores dos seus respectivos coeficientes de atenuação linear com o programa XCOM (National Institute of Science and Technology, 2009). Na Tabela 2 são apresentadas as fórmulas químicas de cada material que compõe o objeto e seus respectivos coeficientes de atenuação linear na energia efetiva, $\mu(E_{ef})$, exceto o ar, cujo $\mu(E_{ef}) \cong 0$.

A Tabela 3 apresenta os valores de número CT esperados de cada material, juntamente com os respectivos valores medidos nas imagens reconstruídas. Cada região de interesse possui uma área de 16.000 pixels.

A partir dos dados apresentados na Tabela 3 foi possível verificar a linearidade do sistema. A Figura 8 apresenta o gráfico com a regressão linear dos valores de número CT esperados sobre os valores medidos para a reconstrução 1. As demais reconstruções apresentaram resultados semelhantes.

Reconstrução multicortes de um objeto não homogêneo e geometricamente assimétrico

A Figura 9 apresenta as imagens reconstruídas de 16 cortes do objeto apresentado na Figura 5b. É possível observar as diferenças nas bolhas de ar internas do objeto nos diferentes cortes reconstruídos. Esta análise qualitativa foi empregada somente para demonstrar que o algoritmo é capaz de reconstruir objetos sem formas geométricas regulares.

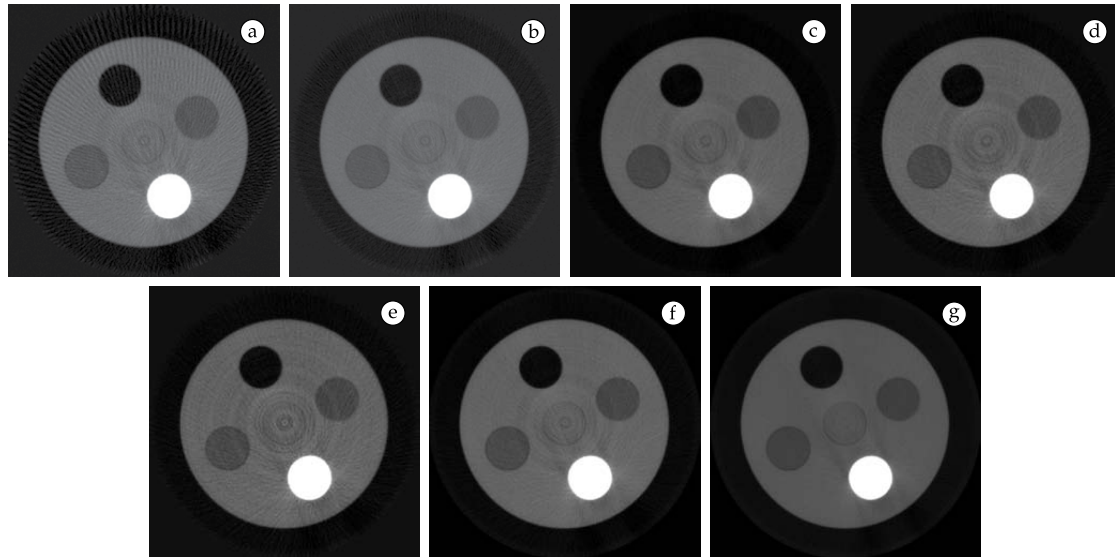


Figura 7. Imagens reconstruídas: (a) sem correção de *aliasing*, a partir de 180 projeções, com 2° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 1 mm; (b) sem correção de *aliasing*, a partir de 360 projeções coletadas, com 1° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 1 mm; (c) sem correção de *aliasing*, a partir de 720 projeções, com 0,5° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 1 mm; (d) sem correção de *aliasing*, a partir de 720 projeções, com 0,5° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 0,5 mm; (e) sem correção de *aliasing*, a partir de 720 projeções, com 0,5° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 0,25 mm; (f) com correção de *aliasing* (reamostragem para duas vezes o tamanho original dos elementos do detector), a partir de 720 projeções com 0,5° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 1 mm; (g) com correção de *aliasing* (reamostragem para duas vezes o tamanho original dos elementos do detector), a partir de 720 projeções, com 0,5° de intervalo angular entre cada projeção e espessura do corte de 3 mm. **Figure 7.** Reconstructed images: (a) without aliasing correction from 180 projections with 2° of angular interval between each projection and slice thickness of 1 mm; (b) without aliasing correction from 360 projections with 1° of angular interval between each projection and slice thickness of 1 mm; (c) without aliasing correction from 720 projections with 0.5° of angular interval between each projection and slice thickness of 1 mm; (d) without aliasing correction from 720 projections with 0.5° of angular interval between each projection and slice thickness of 0.5 mm; (e) without aliasing correction from 720 projections with 0.5° of angular interval between each projection and slice thickness of 0.25 mm; (f) with aliasing correction from 720 projections with 0.5° of angular interval between each projection and slice thickness of 1 mm; (g) without aliasing correction from 720 projections with 0.5° of angular interval between each projection and slice thickness of 3 mm.

Tabela 2. Materiais que compõem o objeto, e suas respectivas fórmulas químicas e coeficientes de atenuação linear na energia efetiva, $\mu(E_{ef})$. **Table 2.** Materials composing the phantom and its chemical formulas, and linear attenuation coefficients at the effective energy.

Material	Polietileno A	Polietileno B	Náilon	Acrílico	PVC
Fórmula Química	C ₂ H ₄	C ₂ H ₄	NOC ₆ H ₁₁	C ₅ O ₂ H ₈	C ₂ H ₃ Cl
Densidade (g·cm ⁻³)	0,92 ± 0,04	0,97 ± 0,04	1,14 ± 0,05	1,18 ± 0,06	1,49 ± 0,08
$\mu(E_{ef})$ (cm ⁻¹)	0,29 ± 0,01	0,30 ± 0,01	0,40 ± 0,02	0,44 ± 0,02	3,46 ± 0,19

Tabela 3. Valores de número CT esperados para cada material que compõe o objeto, juntamente com seus respectivos valores medidos nas imagens reconstruídas. **Table 3.** Expected CT number values for each material composing the phantom, and their respective values measured at the reconstructed images.

Material	Ar	Polietileno A	Polietileno B	Náilon	Acrílico	PVC
Número CT esperado (HU)	-1.000	-413 ± 20	-380 ± 20	-187 ± 41	-102 ± 41	6037 ± 387
Número da Reconstrução	Valores médios de Número CT, em HU, medidos para cada material, sobre uma área de 16.000 pixels (média ± desvio padrão)					
1	-1.014 ± 37	-776 ± 37	-763 ± 37	-683 ± 43	-654 ± 35	1.709 ± 60
2	-1.028 ± 41	-553 ± 46	-526 ± 47	-365 ± 66	-307 ± 48	4.416 ± 89
3	-1.054 ± 62	-103 ± 67	-52 ± 69	272 ± 116	388 ± 72	9.827 ± 147
4	-1.059 ± 83	-106 ± 94	-51 ± 93	271 ± 141	385 ± 90	9.847 ± 173
5	-1.062 ± 105	-103 ± 116	-49 ± 117	282 ± 172	391 ± 124	9.868 ± 213
6	-709 ± 31	-233 ± 36	-207 ± 38	-46 ± 61	11 ± 38	4.734 ± 74
7	-707 ± 22	-232 ± 22	-207 ± 21	-47 ± 32	11 ± 23	4.730 ± 56

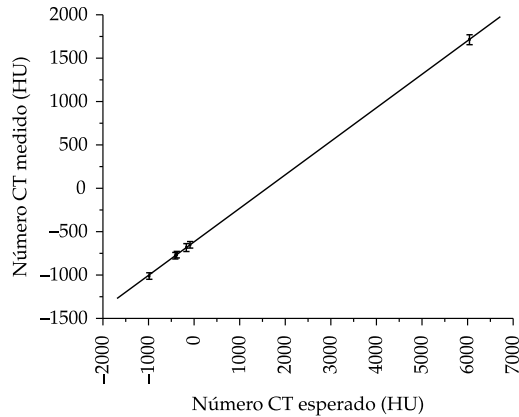


Figura 8. Regressão linear dos valores de número CT esperados sobre os valores medidos na reconstrução 1.
Figure 8. Linear regression with the expected CT Number values measured at reconstruction 1.

Discussão

Na determinação dos números CT de cada material que compõe o objeto reconstruído (Figura 5a), encontrou-se um resultado inesperado para o PVC: não se esperava que este fosse um material tão atenuante para o feixe de raios X produzido com o equipamento Spectro 70X, utilizado no sistema de aquisição. Esta alta atenuação do PVC resultou em um valor de número CT relativamente alto. Na Tabela 3 pode-se observar que o número CT determinado para o PVC é muito maior que os números CT determinados para os outros materiais que compõem o objeto reconstruído. Somado a este fato, há o efeito indesejável de endurecimento de feixe, que é intensificado por materiais muito atenuantes. Este efeito resultou em artefatos nas imagens reconstruídas, que podem ser

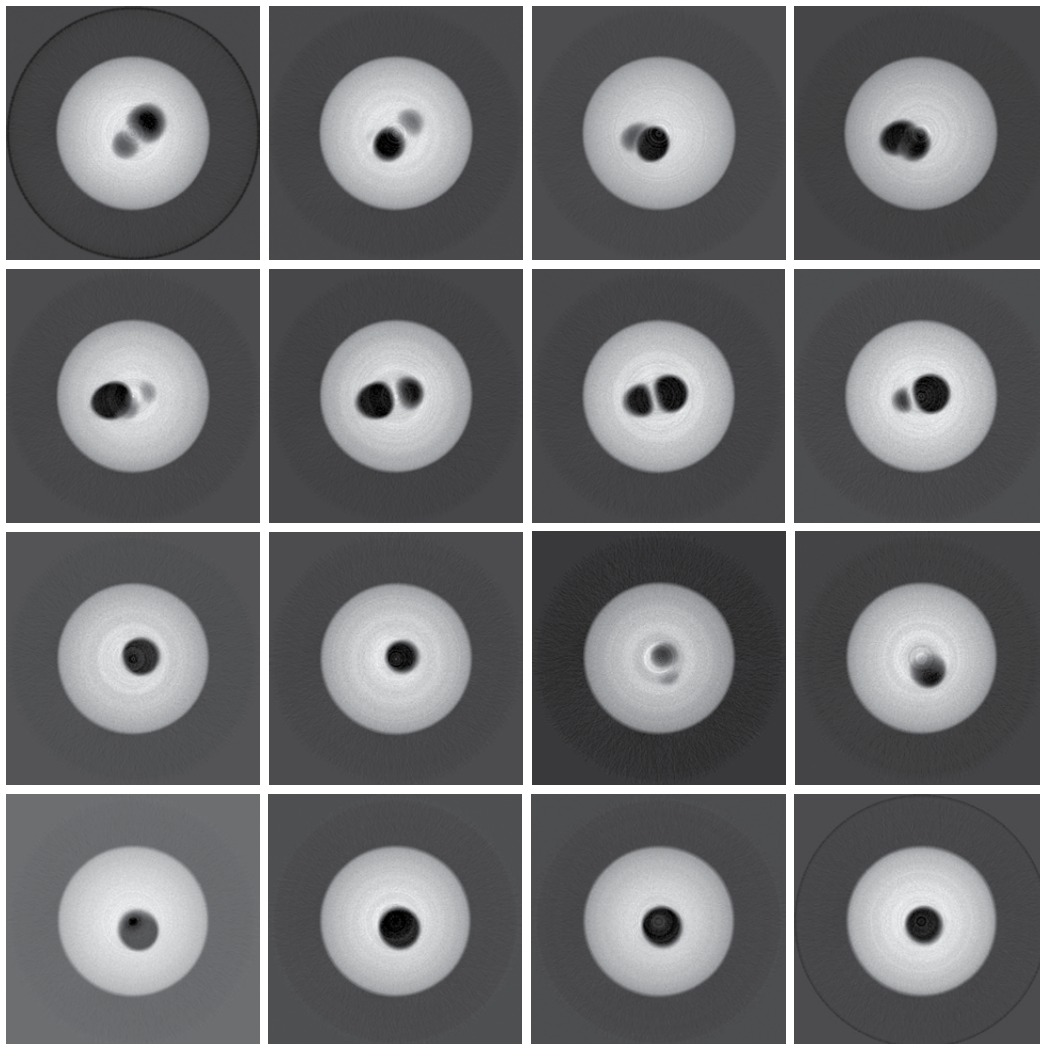


Figura 9. Imagens reconstruídas a partir de 720 projeções de um objeto não homogêneo e assimétrico. Cada imagem representa um corte de 1 mm de espessura. Foram reconstruídos 16 cortes com uma única varredura. Há um espaçamento de 1 mm entre o centro de cada corte adjacente.
Figure 9. Reconstructed images from 720 projections of an inhomogeneous and asymmetric object. Each image represents one 1 mm slice thickness. It was reconstructed 16 slices with only one scan. There are 1 mm spaces between the center of each adjacent image.

observados como linhas mais claras que se originam no centro do cilindro de PVC e se espalham por toda a imagem. Este problema impossibilitou realizar um ajuste adequado de nível e janela para a visualização da maioria das estruturas que compõem o objeto. O alto valor de número CT determinado para o PVC também resultou em maior imprecisão na medição dos números CT dos demais materiais.

A partir das imagens reconstruídas para as diferentes configurações apresentadas na Tabela 1, pôde-se verificar a qualidade das imagens em função do número de projeções e da espessura dos cortes. Nas reconstruções de nº 1, nº 2 e nº 3, variou-se de maneira crescente o número de projeções. Na reconstrução nº 1 observa-se linhas que oscilam entre claras e escuras em toda a imagem mais evidentes na região periférica, causando a perda de resolução na imagem, principalmente na direção azimutal. Esse artefato se deve à sub-amostragem angular, caracterizando-se como artefato de *aliasing*. Com o aumento do número de projeções houve a diminuição desses artefatos e conseqüentemente uma melhora na qualidade das imagens (Figura 7).

Nas reconstruções nº 3, nº 4, nº 5 e nº 7 variou-se basicamente a espessura do corte. Observando as imagens reconstruídas percebe-se uma melhoria na qualidade das imagens devido ao aumento na espessura dos cortes. Esta melhoria é consequência da suavização das projeções na direção z em decorrência do aumento da espessura do corte. Na Tabela 3 pode-se ver que o ruído nas imagens aumenta significativamente com a diminuição da espessura dos cortes.

Nos tomógrafos com varredura helicoidal, o tempo de exposição pode ser muito reduzido com a utilização de cortes mais espessos. No entanto, quanto mais espessos forem os cortes, maior a probabilidade de se produzir artefatos de volume parcial nas imagens reconstruídas. O objeto reconstruído nesta etapa do trabalho possui uma distribuição de coeficiente de atenuação linear independente da altura z e, portanto, as imagens reconstruídas são livres de artefatos de volume parcial.

Dentre todas as imagens reconstruídas nesta etapa do trabalho, a reconstrução nº 7 foi a que apresentou a melhor qualidade. Ela não só é a imagem menos ruidosa, como também é na qual se identifica as diferentes estruturas com maior facilidade.

Os resultados apresentados na Figura 9 mostram a capacidade de reconstrução multicortes do sistema de TCMC implementado. As imagens mostram as

diferenças entre os cortes reconstruídos a diferentes alturas do objeto.

Atualmente existem *softwares* específicos de renderização 3D. Esses programas têm a função de agrupar todos os cortes reconstruídos de um objeto, de modo a apresentar uma representação visual tridimensional do objeto.

Com o constante aumento da qualidade das imagens produzidas pelos tomógrafos clínicos atuais, é possível reconstruir cortes de espessuras suficientemente pequenas, de modo que, a partir da renderização das imagens, seja possível obter cortes em planos de qualquer inclinação.

Conclusão

O sistema implementado é capaz de reconstruir imagens de vários cortes dos objetos e fornece informação quantitativa e qualitativa a respeito dos materiais constituintes dos objetos reconstruídos. Este sistema, contudo, não teve como objetivo a implementação de um sistema de imagens para ser utilizado em seres vivos. Para isso, o tipo de equipamento de raios X a ser utilizado, em especial o espectro de raios X emitido, deveria ser adequado a esta finalidade. O trabalho permitiu a implementação de um algoritmo consagrado e normalmente utilizado em equipamentos comerciais de uso clínico. Assim, o sistema desenvolvido pode ser utilizado, por exemplo, para fins de ensino da técnica tomográfica em seus aspectos matemáticos e computacionais. Pode-se ainda prever aplicações futuras com pequenos animais ou, no caso do desenvolvimento de um *hardware* adequado, a realização de imagens em outros tipos de objetos de dimensões maiores.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (proc. 06/02123-9) e ao CNPq (proc. 311751/2006-7) pelo suporte financeiro parcial a este projeto. Os autores também agradecem aos colaboradores da STDTs-IEE/USP pelo apoio técnico para a realização deste trabalho e ressaltam que toda a etapa experimental foi realizada nos laboratórios do IEE/USP.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DE EQUIPAMENTOS ODONTO-MÉDICO-HOSPITALARES E DE LABORATÓRIO - ABIMO. **Informativo 11**. 2006. Disponível em: <http://www.abimo.org.br/default_interno.asp>. Acesso em: 24 abr. 2006.

- FELDKAMP, L. A.; DAVIS, L. C.; KRESS, J. W. Practical cone-beam algorithm. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 1, n. 6, p. 612-129, 1984.
- HSIEH, J. **Computed Tomography**: principles, design, artifacts, and recent advances. Washington, D.C.: SPIE Publications: Washington, 2003. 387 p.
- KALENDER, W. A. **Computed Tomography**: fundamentals, system technology, image quality, applications. 2nd ed. Munich: Publicis MCD Verlag, 2006.
- KALENDER, W. A.; SEISSLER, W.; KLOTZ, V. P. Single-breath-hold spiral volumetric CT by continuous patient translation and scanner rotation. **Radiology**, v. 173P, p. 414, 1989.
- NATIONAL INSTITUTE OF HEALTH. **Image Processing and Analysis in Java - IMAGEJ**. 2010. Disponível em: <<http://rsbweb.nih.gov/ij/index.html>>. Acesso em: 03 fev. 2009.
- NATIONAL INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY. **XCOM**: photon cross section database. Disponível em: <<http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>>. Acesso em: 03 fev. 2009.
- PARKER, J. A. **Image Reconstruction in Radiology**. Boston: CRC-Press, 1990. 536 p.
- SCHMIDT, T. G.; FAHRIG, R.; PELC, N. J. A three-dimensional reconstruction algorithm for an inverse-geometry volumetric CT system. **Medical Physics**, v. 32, n. 11, p. 3234-3245, 2005.
- SEERAM, E. **Computed Tomography**: physical principles, clinical applications, and quality control. 2nd ed. London: W.B. Saunders Company, 2009. 430 p.
- SHIH, A.; WANG, G.; CHENG, P. C. Fast algorithm for X-ray cone-beam microtomography. **Microscopy and Microanalysis**, v. 7, n. 1, p. 13-23, 2001.
- TANG, X.; HSIEH, J.; NILSEN, R. A.; DUTTA, S.; SAMSONOV, D.; HAGIWARA, A. A three-dimensional-weighted cone beam filtered backprojection (CB-FBP) algorithm for image reconstruction in volumetric CT-helical scanning. **Physics in Medicine and Biology**, v. 51, n. 4, p. 855-874, 2006
- TUY, H. K. An inversion formula for cone-beam reconstruction. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 43, n. 3, p. 546-552, 1983.