

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE HILBERT À ANÁLISE
DO ELETROCARDIOGRAMA

L.C. CARVALHO⁽¹⁾

RESUMO— A transformada de Hilbert tem sido utilizada em muitas aplicações relacionadas com o processamento de sinais. Recentemente ela também tem despertado interesse na área de processamento de sinais biológicos, especialmente no processamento do eletrocardiograma (ECG). Este trabalho faz uma análise teórica da transformada de Hilbert, mostra como implementá-la e analisa aplicações no processamento do ECG, discutindo as suas potencialidades neste campo.

INTRODUÇÃO

A transformada de Hilbert (TH) tem sido largamente empregada em processamento e análise de sinais, aplicada à teoria de comunicação em transmissão de sinais SSB, no tratamento de sinais em presença de ruído, na análise do sinal da fala, etc. O seu conceito tem sido incorporado em "hardware" em equipamentos para a análise de sinais (Thrane, 1985), fluxímetros tipo Doppler direcional (Webster, 1978) e outros. O advento de filtros digitais e processadores de sinais em circuitos integrados tem permitido o emprego desta técnica em aplicações de processamento em tempo real.

Nos últimos anos a TH tem sido empregada também na área de processamento de sinais biológicos, notadamente no processamento do ECG (Bolton, 1981, Takaya e Carvalho, 1983, Oldano e Pincioli, 1984). Neste caso, a TH aplicada a uma única derivação do ECG fornece novos sinais temporais associados (módulo, fase, frequência instantânea) e registros gráficos especiais (displays) que podem ser utilizados vantajosamente na análise de arritmias, detecção do QRS, caracterização de diversos eventos do sinal e em técnicas de reconhecimento de padrão aplicadas ao ECG.

O propósito deste trabalho é o de caracterizar a TH, mostrar um método de implementá-la, discutir aplicações à análise do ECG, mostrar os sinais e registros gráficos obtidos processando-se eletrocardiogramas normais.

A TRANSFORMADA DE HILBERT

A transformada de Hilbert de uma função real $g(t)$ é definida pela operação linear representada pela seguinte equação:

$$H[g(t)] = \hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (1)$$

onde H representa o operador transformada de Hilbert e o símbolo $\hat{\quad}$ usado sobre a letra g indica a transformada.

(1) Professor Adjunto do Departamento de Fisiologia e Patologia da UFPb, Pesquisador do NETEB/UFPb - Hospital Universitário da UFPb - JP - Pb.

Para assegurar convergência, esta integral é calculada como o limite da soma de duas integrais.

Uma observação cuidadosa da equação (1) permite verificar que a TH de $g(t)$ corresponde à convolução de $g(t)$ com a função $1/t$, e esta função corresponde à resposta impulsiva da TH (Fig. 1a). A convolução é uma operação que quando executada no domínio do tempo, é de implementação complexa e computacionalmente lenta.

De acordo com o teorema da convolução (2), sabe-se que esta operação pode ser executada com vantagem no domínio da frequência, onde ela corresponde a simples multiplicações.

$$g(t)*f(t) \xleftrightarrow{F} G(w).F(w) \quad (2)$$

onde o símbolo $*$ representa convolução e F a transformada de Fourier.

A transformada de Fourier da função $1/t$ corresponde à função $-j\text{sgnw}$ (Fig. 1b) definida por (3).

$$-j\text{sgnw} = \begin{cases} j & \text{para } w < 0 \\ -j & \text{para } w > 0 \\ 0 & \text{para } w = 0 \end{cases} \quad j = \sqrt{-1} \quad (3)$$

Este resultado mostra que para obter a TH de uma função deve-se multiplicar os componentes espectrais de $g(t)$ por j ou $-j$, dependendo do sinal de w . Isto corresponde a uma rotação de $\pm 90^\circ$ nos componentes espectrais do sinal original, dependendo da frequência. Então a TH corresponde a um tipo peculiar de filtro no qual as amplitudes dos componentes espectrais não são modificadas mas têm as suas fases alteradas em $\pm 90^\circ$. Diferentemente da transformada de Fourier a TH é aplicada a uma função do tempo e resulta em uma outra função do tempo.

Um método para a obtenção da TH é sumarizado na Fig. 2. FFT corresponde a qualquer algoritmo para a obtenção da transformada rápida de Fourier enquanto IFFT corresponde à inversa. A razão pela qual surge a manipulação dos componentes reais e imaginários mostrada na Fig. 2 é explicada no Apêndice.

A função complexa (4) formada com a função original ($g(t)$ - parte real) e sua TH ($\hat{g}(t)$ - parte imaginária), corresponde ao sinal analítico também referido como pré-envelope de $g(t)$. A TH é também comumente referida como função ou sinal de quadratura do sinal original. O sinal analítico não contém componentes espectrais para $w < 0$, ou seja, para $w < 0$ estes componentes espectrais tem amplitude igual a zero, razão pela qual a TH é útil em aplicações de SSB.

$$z(t) = g(t) + j\hat{g}(t) \quad (4)$$

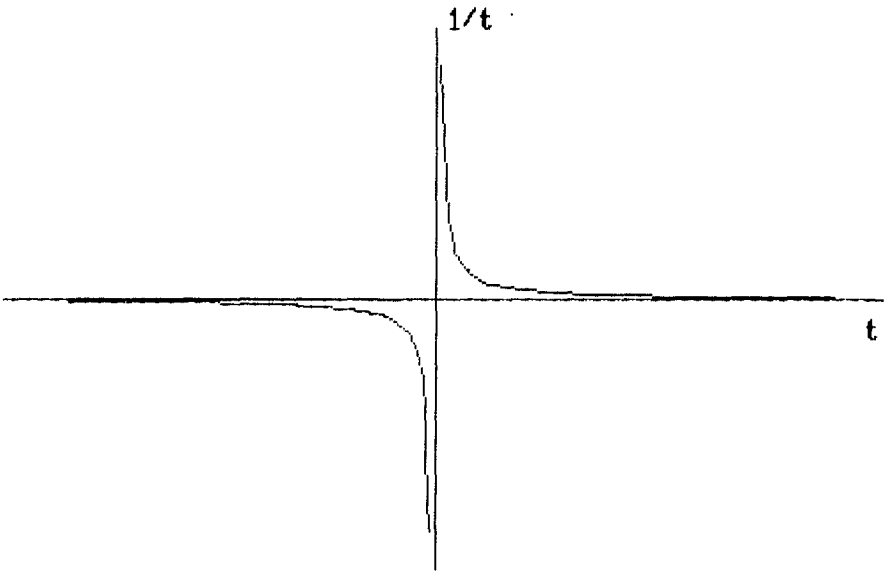
ou

$$z(t) = |z(t)| e^{j\theta(t)} \quad (5)$$

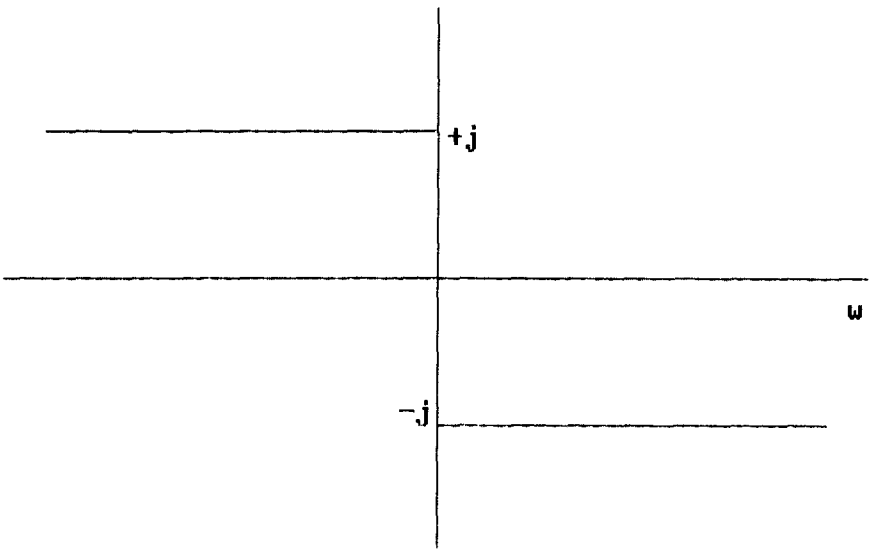
$$|z(t)| = \sqrt{g^2(t) + \hat{g}^2(t)} \quad (6)$$

e

$$\theta(t) = \text{arctg } \hat{g}(t)/g(t) \quad (7)$$



a



b

Fig.1 Em (a) a resposta impulsiva da transformada de Hilbert.
 Em (b) a sua transformada de Fourier função $-jsgnw$.

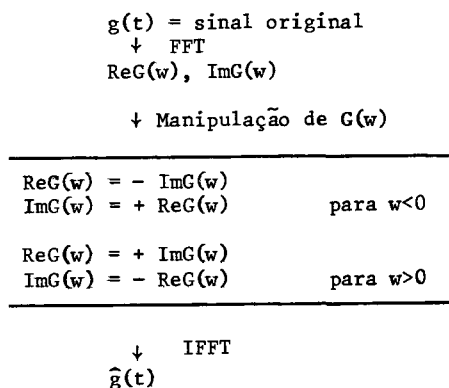


Fig. 2 - Obtenção da TH usando a transformada rápida de Fourier e inversa. Re=parte real, Im=parte imaginária.

As equações (6) e (7) definem duas novas propriedades que podem ser úteis na análise do sinal original: o módulo e a fase do sinal analítico. A primeira é frequentemente chamada de envelope de $g(t)$ e a segunda simplesmente a fase de $z(t)$. Uma terceira função do tempo, a frequência instantânea, obtida pela derivação de $\theta(t)$ também pode ser útil na análise de $g(t)$ (Thrane, 1985).

O sinal analítico corresponde a um vetor que descreve um movimento de revolução em torno do eixo do tempo. A projeção desta função tridimensional no plano complexo representa o diagrama de Nyquist, também chamado de diagrama fasorial.

As figuras 3a e 3b ilustram os gráficos destas diversas funções para uma função senoidal e um pulso, respectivamente. A análise destes gráficos permite visualizar a natureza dos resultados obtidos pela aplicação desta técnica. Por exemplo, a TH do $\sin - \cos$, fato que revela um desvio de 1/4 de comprimento de onda no domínio do tempo, e que corresponde a um desvio de fase de 90° no domínio da frequência. Neste caso, o diagrama de Nyquist é um círculo e a espiral relativa ao sinal analítico corresponde a um movimento circular uniforme em torno do eixo dos tempos.

A aplicação da TH a um pulso, permite verificar o comportamento do sinal obtido, quando existem transições bruscas nos sinais, tal como esperado no caso de complexos QRS. A Fig. 3b demonstra que a transformada do pulso comporta-se de modo similar aos chamados "diferenciadores imperfeitos" (Takaya e Carvalho, 1983) de tal modo que este sinal guarda uma certa semelhança com o negativo da derivada ($-d/dt$ $g(t)$) do sinal do pulso.

APLICAÇÕES DA TH À ANÁLISE DO ECG

Os eletrocardiogramas apresentados nesta seção, obtidos de indivíduos normais, foram convertidos usando-se um conversor A/D de 12 bits implementado por nós para o "bus" do IBM-PC. A frequência de amostragem foi de 500 amostras/seg, exceto para o ECG da Fig. 7 (100 amostras/seg.). Os sinais foram processados em computador compatível com o IBM-XT com 640 Kbytes de memória, coprocessador

seno

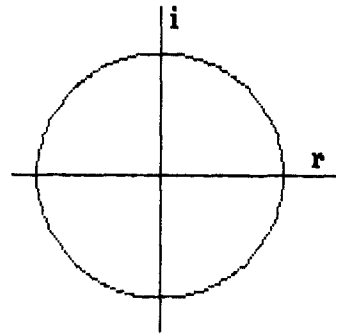


$$H\{\text{seno}\} = -\text{cos}$$

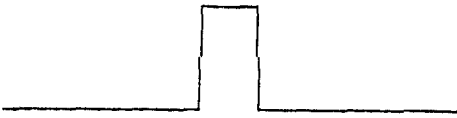


a

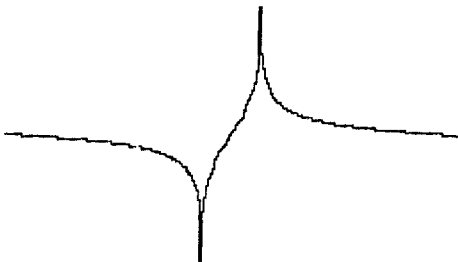
Diagrama de Nyquist



pulso



$$H\{\text{pulso}\}$$



b

Diagrama de Nyquist

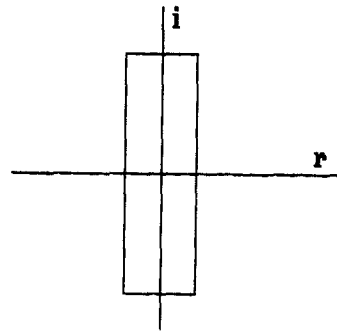


Fig.3 Em (a), uma função seno (traçado superior) e sua transformada de Hilbert -coseno (traçado inferior) e à direita o diagrama de Nyquist. Em (b) um pulso, sua transformada de Hilbert e o diagrama de Nyquist.

8087, Winchester de 20 Mbytes, dois "floppy drives" de 360 Kbytes, portas serial e paralela, placa gráfica de alta resolução (padrão Hercules - 720x348 pixels), usando-se FORTRAN 77 e HBASIC para obtenção dos gráficos. A Fig. 8 foi obtida processando-se o sinal em um computador VAX11/780 e um sistema de processamento de imagens COMTAL.

As figuras 4 e 5 mostram os resultados obtidos com a aplicação da TH à derivação II do ECG de dois indivíduos normais. Nestas figuras temos o ECG, a TH (HECG), módulo e fase. A Fig. 6 mostra os diagramas de Nyquist correspondentes a estes eletrocardiogramas.

Observa-se nestas figuras que a TH do ECG tem uma certa semelhança com o negativo da derivada do sinal original e isto pode torna-la útil na detecção do QRS. Visto que a TH comporta-se como um "diferenciador imperfeito", ela conserva algumas das características úteis da derivada do ECG, largamente empregadas em detectores de QRS, sendo, no entanto, menos suscetível ao ruído. Ahlsstrom e Tompkins (1983, 1985) sugerem a utilização de transformações não lineares para a detecção do QRS baseada no uso da primeira e segunda derivadas do ECG. O ECG é previamente filtrado com um filtro passa faixa que favorece os componentes de frequência do QRS, minimizando a influência das ondas P e T. A primeira e segunda derivadas são retificadas, filtradas ("smoothing") e somadas, resultando em um pulso, após a aplicação de um limiar, com histerese. A Fig. 7a mostra o resultado da aplicação deste procedimento, utilizando-se a TH em substituição à primeira derivada, seguida de nova transformação usada em substituição à segunda derivada. Embora não se tenha utilizado o filtro passa faixa que atenuaria consideravelmente a onda T, vê-se que o pulso resultante (Fig. 7a traçado inferior) permite, após a aplicação de um limiar, a detecção da onda R. Observa-se também que a base do complexo resultante tem uma largura igual à do QRS.

Pahlm e Sörnmo (1984) apontam uma tendência para a utilização de transformações não lineares em algoritmos usados na detecção do QRS. O objetivo destas técnicas é o de obter um pulso positivo único, que permita o uso de um detector de pico ou aplicação de limiares para a detecção do QRS. Eles mostram que o envelope do sinal (módulo-figuras 4 e 5), foi utilizado com este objetivo. A Fig. 7b demonstra a utilização do módulo do sinal analítico utilizado para detectar o QRS no mesmo sinal da Fig. 7a. Como no caso anterior a utilização de um filtro passa faixa atenuaria a onda T, permitindo a obtenção de um pulso único, positivo. Uma vez mais a aplicação de um limiar permitiria a detecção do pico da onda R. Neste caso também observa-se que a base do complexo resultante (Fig. 7b - traçado inferior) tem largura idêntica à do QRS.

Os diagramas de Nyquist apresentados na Fig. 6 tem uma grande semelhança com o vectocardiograma. A cada complexo do ECG corresponde uma alça neste registro gráfico. Isto fica particularmente bem ilustrado na Fig. 6b onde a alça pequena central corresponde à onda P, a alça de tamanho intermediário corresponde à onda T e a alça maior ao complexo QRS. Este tipo de display é, portanto, familiar aos cardiologistas. O diagrama pode ser obtido plotando-se a parte real contra a parte imaginária do sinal analítico. Bolton e Westphal (1981) ressaltaram a vantagem deste display ser criticamente dependente da forma do ECG e ao mesmo tempo insensível a variações na escala e origem do tempo. O método enfatiza perturbações na forma de onda do ECG, sem que seja necessária a normalização para uma frequência padrão. Isto permite a comparação de batimentos separados, de modo mais simples do que no domínio do tempo, onde se torna necessário alinhar os complexos para compará-los. Eles aplicaram técnicas de reconhecimento de padrões usando o diagrama de Nyquist para comparar batimentos separados, classificando-os de acordo com um certo número de classes normais previa

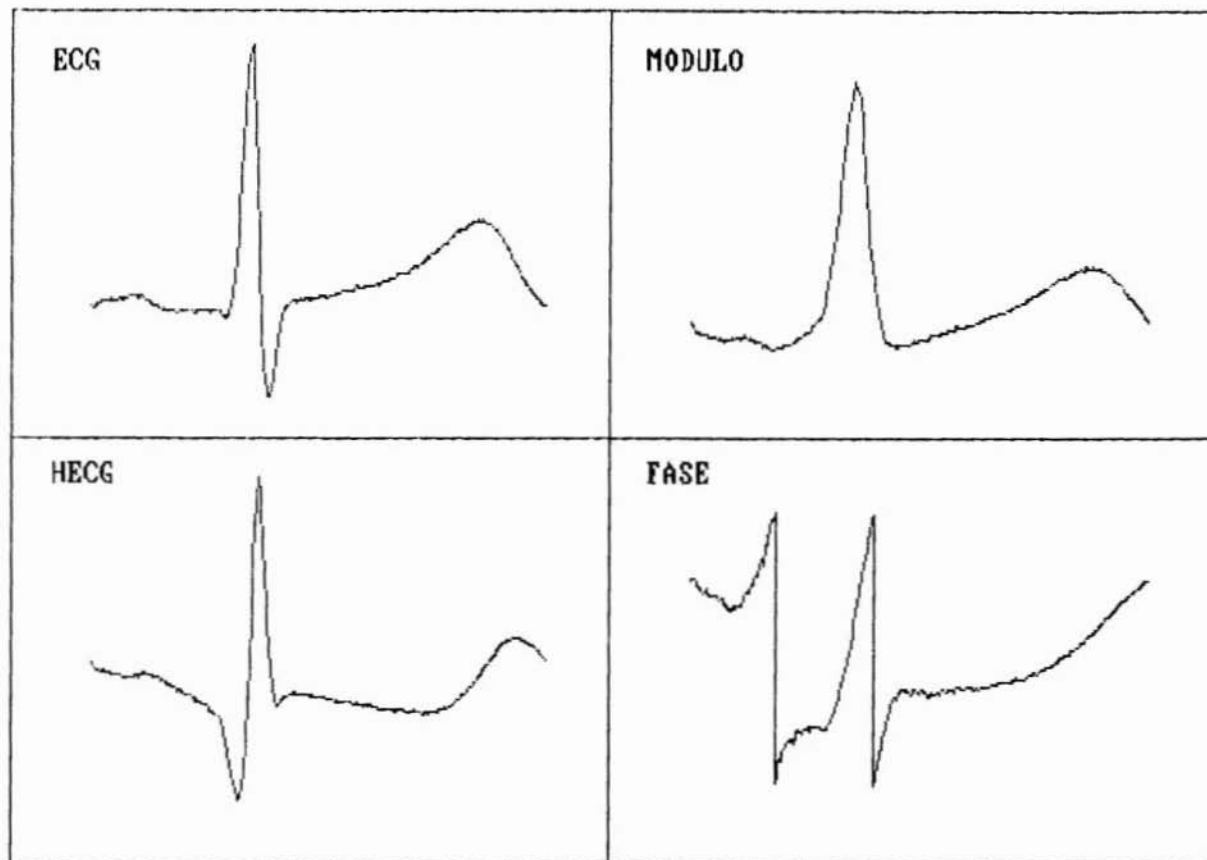


Fig.4 ECG, transformada de Hilbert(HECG), módulo e fase do sinal analítico para a derivação II do ECG de um indivíduo normal.

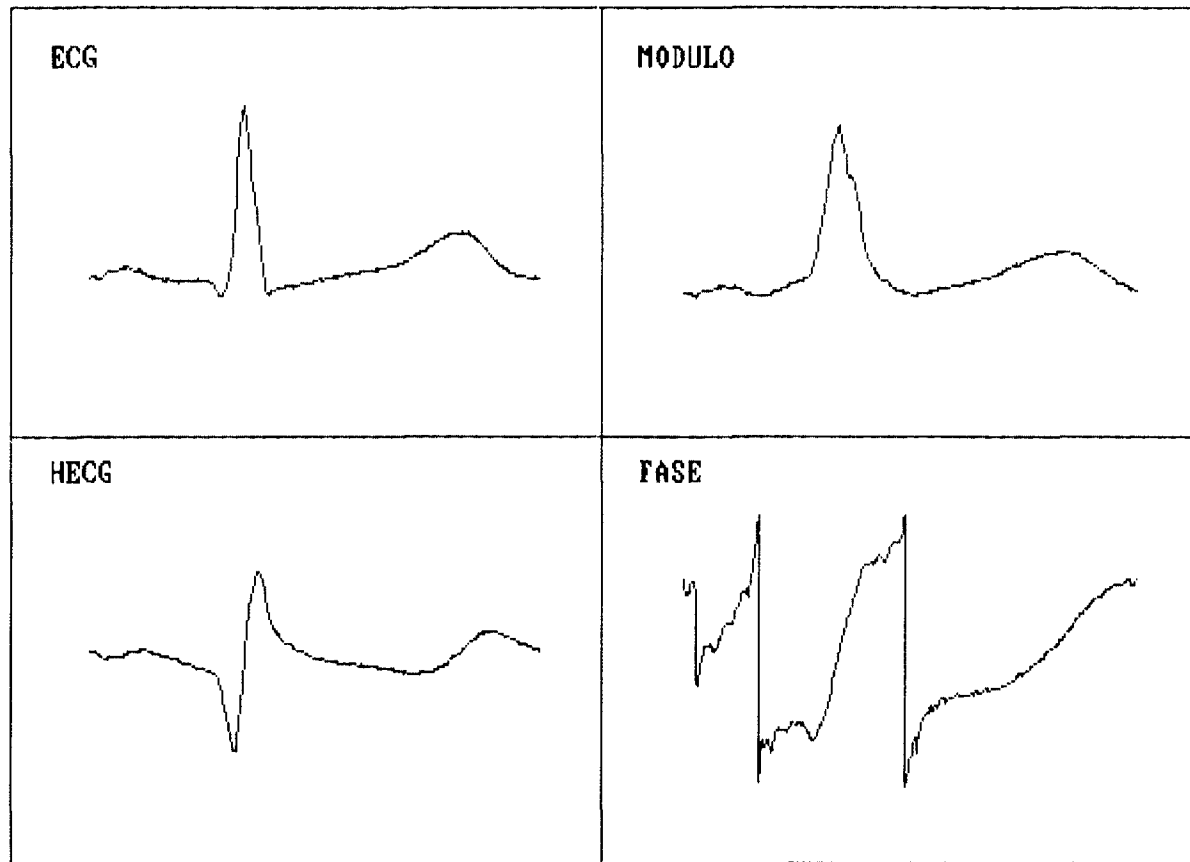


Fig.5 ECG, transformada d Hilbert(HECG), mōdulo e fase do sinal analítico para a derivação II do ECG de outro indivíduo normal.

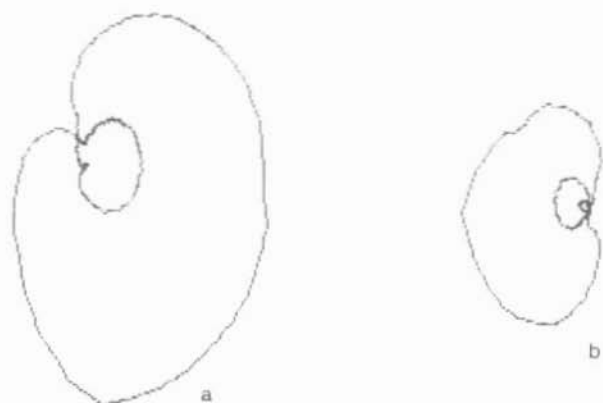


Fig.6 Em (a) o diagrama de Nyquist para o ECG da Fig.4 e em (b) para o ECG da Fig.5.



Fig.7 Transformada de Hilbert e módulo do sinal analítico na detecção do QRS. Vide explicações no texto.

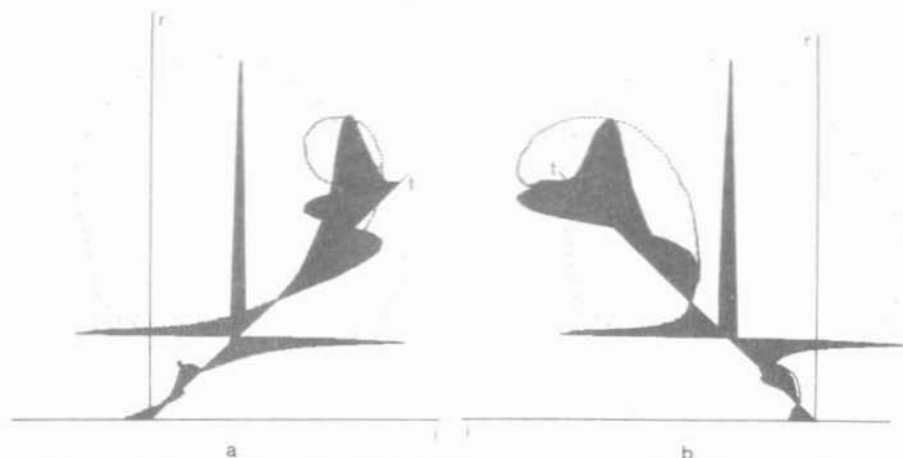


Fig.8 Visão tridimensional do ECG, transformada de Hilbert e sinal analítico. (a) vista de frente (b) vista de trás.

mente determinadas.

Takaya e Carvalho (1983) sugeriram manter o eixo do tempo no display para melhor ilustrar as relações entre parte real (ecg), parte imaginária (hecg) e o próprio sinal analítico com suas espirais de revolução. Isto resulta em um display tridimensional mostrado nas figuras 8a (vista de frente) e 8b (vista de trás). Nestas figuras os eixos real, imaginário e do tempo são marcados com r, i e t, respectivamente.

O diagrama de Nyquist corresponde, na realidade, à projeção das espirais de movimento do sinal analítico no plano complexo. A catalogação do display tridimensional para complexos normais e anormais pode ser feita e técnicas de processamento, baseadas em reconhecimento de padrões, podem ter utilidade em programas de diagnóstico de ECG usados em grande escala

CONCLUSÕES

No presente trabalho foi feita uma discussão teórica sobre a TH e um método para sua implementação foi apresentado. ECG's de indivíduos normais foram processados utilizando-se esta técnica. Embora a TH do sinal contenha essencialmente a mesma informação do sinal original, a aplicação do método resulta em uma série de sinais temporais e displays derivados do sinal analítico. Aplicações destes sinais e displays correntemente empregadas na análise do ECG foram discutidos enquanto que novas aplicações relacionadas à detecção do QRS foram testadas em eletrocardiogramas normais com indicações de que o método pode ser utilizado a contento para este objetivo. Um display tridimensional no qual o ECG original é mantido, juntamente com as espirais do sinal analítico foi apresentado. Tal display permite ao cardiologista correlacionar complexos anormais com as diversas espirais do sinal analítico. Isto pode ser a base para um sistema de reconhecimento de padrões baseado neste tipo de display.

REFERÊNCIAS

1. Ahlstrom, M.L., Tompkins, W.J. (1985), "Digital Filters for Real Time Signal Processing Using Microprocessors", IEEE Transaction on Biomedical Engineering, vol. BME-32, nº 9:708-713.
2. Ahlstrom, M.L., Tompkins, W.J. (1983), "Automated High-Speed Analysis of Holter Tapes with Microcomputers", IEEE Transaction on Biomedical Engineering, vol. BME-30, nº 10:651-657.
3. Bolton, R., Westphal, L.C., "Preliminary Results in Display and Abnormality Recognition of Hilbert Transformed ECG.s", Medical & Biological Engineering & Computing, vol. 19:377-384.
4. Oldano, G., Pinciroli, F. (1984), "The Electrocardiogram in the Variability Analysis", Computers in Biology and Medicine, vol. 14, nº 13:315-324.
5. Palm, O., Sörnmo, L. (1984), "Software QRS Detection in Ambulatory Monitoring - A Review", Medical & Biological Engineering & Computing, vol. 22:289-297.
6. Takaya, K., Carvalho, L.C. (1983), Interpretation of Hilbert Transformed Electrocardiograms", Proceedings of the Ninth Canadian Congress of Applied Mechanics. University of Saskatchewan-Saskatoon. Pages 815-816.
7. Thrane, N. (1985), "The Hilbert Transform", Selected Reprints from B & K Technical Reviews.
8. Webster, J.G. (Ed.) (1978), Medical Instrumentation: application and design. Houghton Mifflin. Boston.

APÊNDICE

Este apêndice fornece um algoritmo escrito em FORTRAN para o cálculo da TH, explicando também como surge a manipulação das partes real e imaginária mostrada na Fig. 2. Os passos necessários para obter a TH envolvem: 1) aplicação da transformada de Fourier à sequência original, 2) aplicação da subrotina da TH ao resultado de 1, 3) aplicação da transformada inversa de Fourier.

C SUBROTINA HILBRT

C XR = vetor de entrada contendo a parte real da transformada de Fourier
C XI = vetor de entrada contendo a parte imaginária da Transformada de Fourier
C N = número de pontos do sinal original, NP = potência de 2 tq $2^{**}NP = N$

```
SUBROUTINE HILBRT (XR, XI, N, NP)
DIMENSION XR(N), XI(N)
```

```
N2 = N/2
XR(1) = 0.
XI(1) = 0.
XR(N2+1) = 0.
XI(N2+1) = 0.
```

```
C Para w>0
DO 100 I=2, N2
  WW = XR(I)
  XR(I) = + XI(I)
100  XI(I) = - WW
```

```
C Para w<0
DO 200 I = N2 + 2, N
  WW = XR(I)
  XR(I) = - XI(I)
200  XI(I) = + WW
RETURN
END
```

A manipulação das partes real e imaginária feita no algoritmo acima deriva da multiplicação por $+j$ ou $-j$ no domínio da frequência como segue:

Seja $x(t)$ a função original, então:

$$F[x(t)] = X(w) = \text{Re}X(w) + j\text{Im}X(w)$$

multiplicando por $-j$ para $w>0$ temos: $-jX(w) = \text{Im}X(w) - j\text{Re}X(w)$, ou seja, após a manipulação obtêm-se $\text{Re} = + \text{Im}X(w)$ e $\text{Im} = - \text{Re}X(w)$.

multiplicando por $+j$ para $w<0$ temos: $+jX(w) = -\text{Im}X(w) + j\text{Re}X(w)$ ou seja, após a manipulação obtêm-se $\text{Re} = - \text{Im}X(w)$ e $\text{Im} = + \text{Re}X(w)$.

Aplicando-se a transformada inversa de Fourier a este resultado obtêm-se finalmente a transformada de Hilbert.

HILBERT TRANSFORM APPLICATIONS TO THE ELECTRO-
CARDIOGRAM ANALYSIS

ABSTRACT— The Hilbert Transform has been used in many signal processing applications. It has also been used, recently, in biological signal processing, specially in ECG processing. This paper discusses the Hilbert Transform from a theoretical point of view, shows how to implement it and analyzes some applications in ECG processing, looking forward to evaluate it's strength in this field.