

MODELO AUTOREGRESSIVO APLICADO A ANÁLISE ESPECTRAL DE SINAIS  
DOPPLER ULTRA-SÓNICOS EM TEMPO-REAL

por

F.S. SCHLINDWEIN<sup>1</sup> e D.H. EVANS<sup>2</sup>

**RESUMO** -- A estimação da densidade espectral de potência de sinais Doppler é normalmente realizada através de uma transformada rápida de Fourier (FFT). Apesar de ser um algoritmo computacionalmente muito eficiente e produzir resultados satisfatórios para o regime de análise normalmente usado (128 componentes de frequência calculados a cada 5 ou 10 ms), a FFT tem limitações: A estimativa do espectro produzida pela FFT é um sinal discreto com  $N/2$  valores para  $N$  amostras do sinal Doppler; a resolução espectral é o inverso do intervalo de tempo correspondente ao segmento de sinal analisado, e a FFT assume implicitamente periodicidade do sinal, o que, para trechos finitos de sinal, causa o fenômeno de 'leakage'. A técnica autoregressiva (AR) produz um espectro contínuo, não assume que o sinal seja periódico no domínio do tempo, e nem sofre dos indesejáveis efeitos decorrentes da aplicação de 'janelas anti-leakage'. Em situações onde o espectro do sinal varia rapidamente no tempo o modelo autoregressivo apresenta-se como uma técnica promissora pela capacidade de estimar o espectro do sinal a partir de segmentos curtos. Um sistema composto por um processador de sinais digitais TMS320C25 e um microcomputador pessoal foi programado para obter, em tempo-real, o espectro do sinal Doppler utilizando o modelo AR de máxima entropia para a análise espectral. O sistema amostra o sinal Doppler com frequências de até 40.96kHz e produz 128 componentes de frequência a partir de 64 amostras. O sonograma-AR é exibido na tela do microcomputador em tempo-real. A análise de cada segmento é realizada em 3.2ms, tipicamente.

---

<sup>1</sup> Professor Assistente do Departamento de Engenharia Eletrônica da Escola de Engenharia da UFRJ, e do Programa de Engenharia Biomédica da COPPE/UFRJ, CEP 21945 - Rio de Janeiro, RJ. Brasil.

<sup>2</sup> Top Grade Physicist, Department of Medical Physics & Clinical Engineering, Leicester Royal Infirmary. Leicester LE1 5WW, UK. (endereço para correspondência).







(FAC) do sinal, e esses coeficientes são usados para extrapolar a FAC além dos valores conhecidos. O estimador do espectro é obtido a partir dessa função de autocorrelação extrapolada. Esse procedimento significa que não é assumido que o sinal seja periódico ou nulo fora do intervalo de amostragem, sendo assim, a técnica não sofre os efeitos indesejáveis de aplicação de janelas de processamento. Como a densidade espectral de potência é a transformada de Fourier da função de autocorrelação, a extrapolação dos coeficientes também implica que o método não está restrito a estimação de apenas  $N/2$  componentes espectrais para segmentos de  $N$  amostras. Em 1986, Kitney e Giddens sugeriram que a habilidade de estimar o conteúdo de frequência de sinais a partir de segmentos muito menores torna a técnica autoregressiva atraente para a estimação do conteúdo de frequência de sinais Doppler correspondentes a fluxo instável (pouco estacionário).

Esse artigo descreve a implementação, em tempo-real, da técnica autoregressiva de máxima entropia para análise espectral de sinais Doppler e discute brevemente algumas possíveis vantagens desta sobre a técnica dos periodogramas.

TRANSFORMADA DE FOURIER, TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER,  
FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO E A FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL

A transformada de Fourier de um sinal analógico, determinístico e contínuo no tempo,  $x(t)$ , é o sinal contínuo  $X(f)$ , definido como

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1)$$

e o quadrado dos valores absolutos da transformada é chamado espectro de energia do sinal,  $S(f)$

$$S(f) = |X(f)|^2 \quad (2)$$

Quando se trata de processamento digital de sinais, duas modificações são introduzidas a partir das definições acima: Em primeiro lugar, computadores digitais não podem trabalhar com sinais contínuos, logo o sinal  $x(t)$  é discretizado.

Uma das diferenças entre a transformada de Fourier de uma série discreta e a do sinal contínuo que deu origem a série é o fato de que a transformada da série é periódica, com período  $1/T$ , onde ' $T$ ' é o período de amostragem. Amostragem no domínio do tempo corresponde a periodicidade no domínio da frequência e vice-versa (Brigham, 1974). Desde que o sinal original não possua frequências acima de  $1/2T$ , o formato do espectro não é corrompido pela amostragem. Como sempre é possível garantir a ausência de 'aliasing' utilizando-se um filtro analógico passa-baixas com frequência de corte na maior frequência de interesse e escolhendo-se uma taxa de amostragem conveniente, não é a





Dependendo do tipo de sinal a ser analisado, o modelo de Fourier pode não ser o mais adequado para descrever o processo, ie, é possível que algum outro modelo seja capaz de descrever o sinal em mais detalhe (com melhor resolução espectral, por exemplo), ou que faça extrapolações mais razoáveis a respeito do comportamento do sinal fora do intervalo utilizado (evitando o 'leakage' e a necessidade de utilizar janelas de processamento).

A fig.3 ilustra uma situação em que as técnicas tradicionais de Blackman & Tukey (com  $M=25$ ) e FFT com janela de Hanning não conseguem resolver as duas componentes espectrais de um processo que consiste da soma de duas senóides com frequências normalizadas de 12.1/32 e 12.9/32, enquanto a técnica auto-regressiva (com  $p=25$ ) resolve.

O modelo autoregressivo assume que o valor atual do processo,  $x_n$ , pode ser descrito como uma função de uma série finita de valores do processo mais o valor atual de um ruído branco,  $n_n$ , como função forçante (Box and Jenkins, 1976). Um processo autoregressivo de ordem  $p$  e média zero é definido como

$$x_n = n_n - a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2} - a_3 x_{n-3} - \dots - a_p x_{n-p} \quad (8)$$

O modelo contém  $n+1$  parâmetros que devem ser estimados a partir dos dados: os coeficientes,  $a(k)$ , e a variância do ruído branco,  $\sigma^2$ . A estimação desses parâmetros resulta em equações lineares, denominadas equações de Yule-Walker.

#### Equações de Yule-Walker e algoritmo recursivo para o cálculo dos parâmetros do modelo autoregressivo

O método clássico de calcular os coeficientes,  $a(k)$ , e a variância do ruído forçante,  $\sigma^2$ , de um processo autoregressivo (AR) de média zero e ordem  $p$  é através das equações de Yule-Walker (Kay and Marple, 1981)

$$\begin{aligned} R_{xx}(0) + a_1 R_{xx}(1) + a_2 R_{xx}(2) + \dots + a_p R_{xx}(p) - \sigma^2 &= 0 \\ R_{xx}(1) + a_1 R_{xx}(0) + a_2 R_{xx}(1) + \dots + a_p R_{xx}(p-1) &= 0 \\ R_{xx}(2) + a_1 R_{xx}(1) + a_2 R_{xx}(0) + \dots + a_p R_{xx}(p-2) &= 0 \\ R_{xx}(3) + a_1 R_{xx}(2) + a_2 R_{xx}(1) + \dots + a_p R_{xx}(p-3) &= 0 \\ \vdots & \\ R_{xx}(p) + a_1 R_{xx}(p-1) + a_2 R_{xx}(p-2) + \dots + a_p R_{xx}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $R_{xx}(k)$  é o estimador da função de autocorrelação

$$R_{xx}(k) = \frac{\sum_{n=0}^{N-k-1} x(n+k)x(n)}{N} \quad (10)$$

e  $\sigma^2$  é a variância do ruído branco.





para  $N$ . Esta definição alternativa para o estimador da FAC é defendida por Gold e Rader (1969) e por Box e Jenkins (1976), que argumentam que o estimador tendencioso é estatisticamente melhor que o estimador não tendencioso da eq.(7), já que, na medida que  $k \rightarrow N$ , as estimativas dos valores da FAC são estatisticamente mais pobres porque menos termos da série original foram usados para o cálculo; assim, menor peso dever-lhes ser atribuído.

Um método alternativo para a obtenção dos parâmetros autoregressivos é o chamado algoritmo de Levinson-Durbin (Kay and Marple, 1981). O método é computacionalmente muito eficiente e baseia-se na importante propriedade de que os coeficientes de um processo AR de ordem  $k$  podem ser obtidos a partir dos parâmetros do modelo de ordem  $k-1$ , mais  $k$  valores da função de autocorrelação. Inicialmente os coeficientes do processo de primeira ordem são obtidos, e a partir desses, o algoritmo continua iterativamente até a ordem desejada  $p$ .

Nas equações de Levinson-Durbin que seguem, dois índices são empregados para os coeficientes  $a(k,i)$ . O primeiro índice,  $k$ , representa a ordem do modelo e o segundo,  $i$ , o número do coeficiente.

O modelo de primeira ordem é definido por

$$a(1,1) = -R_{XX}(1)/R_{XX}(0), \text{ e} \quad (11)$$

$$\sigma(1)^2 = [1 - a(1,1)^2] R_{XX}(0), \quad (12)$$

e então a seguinte iteração é utilizada para a obtenção de ordem superiores, desde  $k = 2$  até  $p$

$$a(k,k) = -[R_{XX}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a(k-1,i)R_{XX}(k-i)] / \sigma(k-1)^2, \quad (13)$$

$$a(k,i) = a(k-1,i) + a(k,k)a(k-1,k-i), \quad (14)$$

$$\sigma^2(k) = [1 - a(k,k)^2] \sigma(k-1)^2. \quad (15)$$

Quando a ordem desejada,  $p$ , é alcançada, a estimativa da densidade espectral de energia do sinal é dada por

$$S_{AR}(f) = \sigma(p)^2 T / \left| \sum_{n=0}^p a(p,n) \exp(-j2\pi fnt) \right|^2, \quad (16)$$

onde  $a(p,0) = 1$

Note-se que a equação (16) refere-se a uma função contínua,  $S(f)$ , obtida a partir de uma série discreta finita de parâmetros,  $a(p,n)$  e  $\sigma(p)^2$ . Para executar a tarefa em um computador digital, o espectro de energia é calculado para uma série finita de frequências,  $k$



Como a maior parte dos problemas da técnica dos periodogramas para a estimação do espectro está relacionada às restrições feitas ao comportamento do sinal fora do intervalo medido (periodicidade), e já que o modelo autoregressivo não faz esta restrição, a técnica AR não sofre as seqüelas da necessidade de utilizar janelas 'anti-leakage'. Como a FAC pode ser estendida conforme a eq.(18), e  $r_{xx}(n)$  é constituída de uma quantidade de valores limitada apenas por erros de aproximação, o número de componentes espectrais na técnica AR não é limitado a  $N/2$  valores para  $N$  amostras (fig.3). Isso pode ser particularmente interessante na estimação do conteúdo de frequências de sinais pouco estacionários, já que séries temporais mais curtas podem ser empregadas pelo modelo AR comparativamente a técnica tradicional de FFT's. Cabe salientar que os valores adicionais obtidos no espectro de frequência devido a extrapolação da FAC não são, de modo algum equivalentes a interpolação tipo  $\text{sen}(f)/f$  obtida quando a série temporal é complementada com zeros na técnica de Fourier!

#### DECISÕES DE PROJETO

Antes de implementar um analisador espectral em tempo-real, é preciso conhecer o tipo de sinal que se deseja analisar e algumas decisões de projeto precisam ser tomadas:

- Qual frequência de amostragem deve ser empregada?
- Qual é o tamanho do segmento de sinal a ser utilizado para as estimativas do espectro?
- Quantas componentes espectrais são desejadas?
- Quantos espectros por segundo são desejados (resolução temporal)?

O conteúdo de frequência do sinal determinará a frequência de amostragem a empregar, já que a máxima frequência analisada,  $F_{\text{max}}$ , é a metade da frequência de amostragem,  $f_{\text{am}}$ . Como tal informação não é conhecida 'a priori', é interessante dotar o sistema de um conjunto de possibilidades para  $f_{\text{am}}$  (e, conseqüentemente,  $F_{\text{max}}$ ), deixando ao operador a escolha dentre elas. Cinco possibilidades de taxa de amostragem foram implementadas no sistema, de 2.56kHz a 40.96kHz (tabela 1), permitindo analisar sinais com  $F_{\text{max}}$  de até 20.48kHz.

O comprimento do segmento a utilizar para a estimativa do espectro depende da estacionariedade do sinal que se deseja analisar. Sinais Doppler são considerados quase-estacionários por períodos de até 20ms (Evans, 1986), mas há sítios (crossa da aorta, ou em estenoses, por exemplo) nos quais sabe-se que o espectro do sinal Doppler varia muito rapidamente ao longo do tempo, e aí o período para o qual o sinal pode ser considerado estacionário pode ser bem menor. Tem-se então uma relação de compromisso: Os segmentos devem ter o menor tamanho possível para evitar problemas de estacionariedade, mas ao mesmo tempo, trechos muito curtos de sinal implicarão estimativas estatisticamente pobres para o espectro. No sistema descrito neste



situação em que há uma superposição de 75% entre segmentos consecutivos, para  $f_{am}$  de 2.56kHz (vide fig.4).

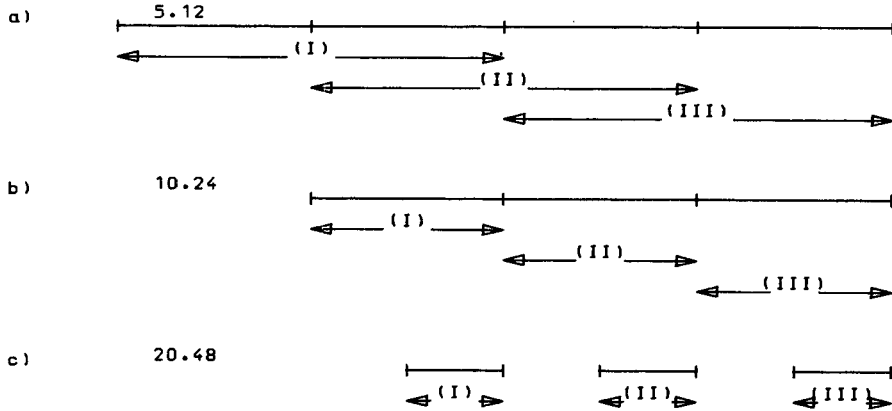


Figura 4 - A taxa de cálculo dos espectros foi fixada em 160Hz, independentemente da taxa de amostragem. Sendo assim, para  $f_{am}=5.12$ kHz (a), há uma sobreposição de 50% entre segmentos consecutivos; para  $f_{am}=10.24$ kHz (b), os segmentos são justapostos; e para  $f_{am}=20.48$ kHz (c), um em cada dois trechos de sinal é analisado.

#### HARDWARE

O hardware do sistema consiste basicamente de três grandes blocos (fig.5): Uma interface analógica, uma placa de desenvolvimento com um processador de sinais digitais baseada no DSP TMS320C25, da Texas Instruments, e um microcomputador pessoal RM Nimbus PC2, baseado na CPU 80186, da Intel.

A interface analógica (Schlindwein, Smith and Evans, 1988), consiste de proteção contra sobre-tensão, filtro 'anti-aliasing' programável, e amplificador de entrada com ganho controlado pelo operador. O sinal de entrada para o sistema consiste em um canal de sinal Doppler contendo informação de fluxo direto e reverso, devidamente misturados por um modulador cuja frequência de modulação é controlada pelo operador. No sonograma, a frequência de modulação serve como uma linha de base, acima da qual representa-se fluxo direto e abaixo, fluxo reverso, conforme o diagrama da fig.1. O sinal é acoplado em AC através de um filtro passa-altas com  $f_0 = 7.2$ Hz.

A placa de desenvolvimento (Loughborough Sound Images-LSI), contém o processador de sinais digitais, um TMS320C25 com 'clock' a 40MHz capaz de executar 10 MIPS; 8 kbytes de memória















$$T_t = T_{\text{proc}} / (1 - T_{\text{isr}} f_{\text{am}}) \quad (21)$$

onde

$T_t$  - é o tempo de execução incluindo interrupções,  
 $T_{\text{proc}}$  - é o tempo do processamento sem interrupções,  
 $T_{\text{isr}}$  - é o tempo tomado pela rotina de interrupção, e  
 $f_{\text{am}}$  - é a frequência de amostragem.

TABELA 2

autocorrelação .....	0.442 ms
cálculo dos coeficientes AR.....	0.672 ms
extrapolação da autocorrelação ....	0.723 ms
Transformada rápida de Fourier ....	1.366 ms
TOTAL .....	3.2 ms

O tempo de processamento foi medido para um modelo AR de ordem 20. Os tempos referentes ao cálculo dos coeficientes e à extrapolação da FAC dependem da ordem do modelo.

Na presente implementação, com ordem  $p=20$ , o tempo de processamento,  $T_{\text{proc}}$ , é tipicamente de 3.225ms, e  $T_{\text{isr}}$  é de 2.7 $\mu$ s. O tempo de processamento depende da ordem do modelo, conforme mostrado na figura 9. Para um modelo de terceira ordem, o tempo de processamento é apenas 2.422ms, para  $p=10$ ,  $T_{\text{proc}} = 2.701\text{ms}$ , e para  $p=32$ ,  $T_{\text{proc}} = 4.055\text{ms}$ .

### DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Apesar de ser um método muito popular, a técnica de análise espectral por periodogramas fornece estimadores do espectro que nem sempre são os mais adequados para o trecho de sinal em questão. Principalmente quando se trata de trechos curtos de sinais pouco estacionários, as restrições ao comportamento do sinal fora do intervalo de medição e os efeitos da janela de processamento podem ser bastante inconvenientes em termos de distorção no estimador do espectro.

Em 1986, Kitney e Giddens sugeriram que, em certas condições, a técnica autoregressiva de análise espectral pode fornecer melhores estimadores do espectro do sinal do que o clássico método de FFT-periodogramas. Para que o método tenha aplicação clínica, no entanto, é interessante que a análise espectral possa ser feita em tempo-real. O principal objetivo deste estudo foi determinar a exeqüibilidade de implementar a análise espectral de sinais Doppler ultra-sônicos segundo o modelo autoregressivo em tempo-real utilizando um processador de sinais digitais e um microcomputador pessoal.



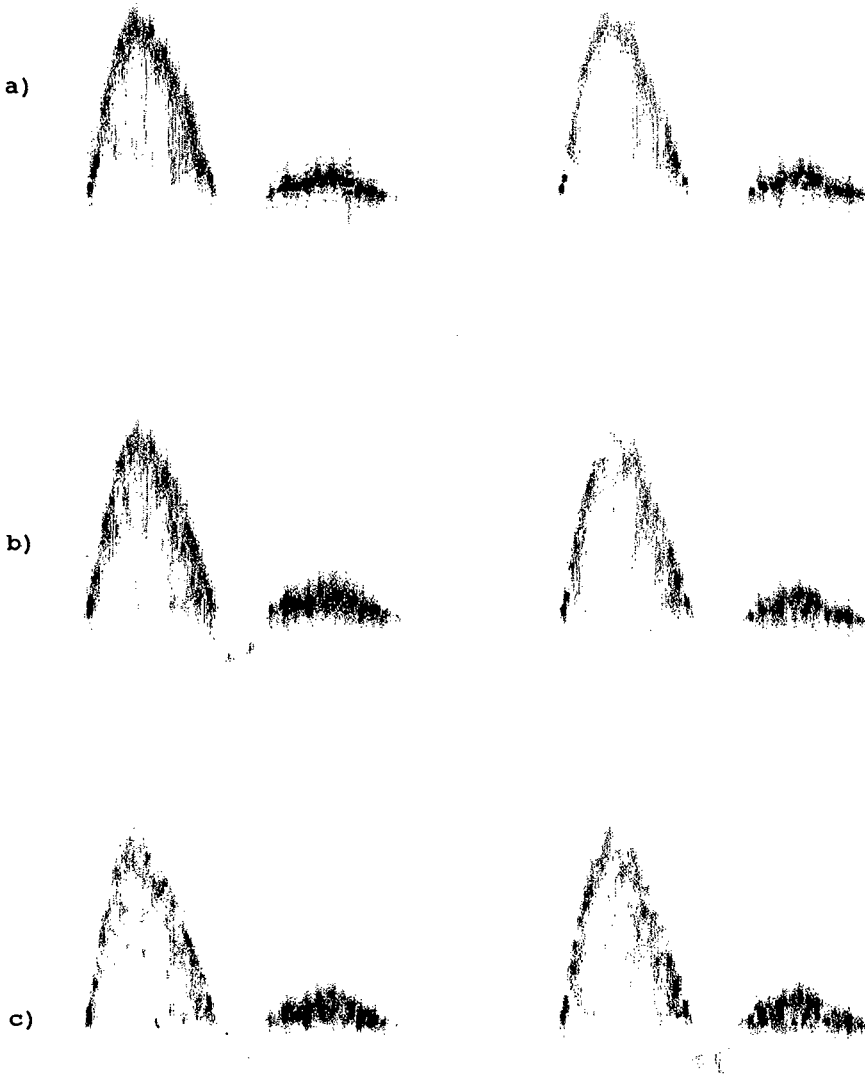


Figura 10 - Como avaliação preliminar da importância da ordem do modelo AR, diferentes ordens foram utilizadas para a obtenção de sonogramas AR a partir dos mesmos dados. Em (a),  $p=5$ , em (b),  $p=11$ , e em (c),  $p=32$ .

sinais produz espectros a uma taxa de 160 por segundo, mas o TMS320C25 é capaz de executar a análise a uma taxa de até 275Hz. Para melhor resolução temporal outro DSP deve ser considerado. O TMS320C30, capaz de executar 33 MFLOPS merece consideração.

Sabe-se que teoricamente há uma ordem ótima para o modelamento AR de cada série temporal e alguns pesquisadores propuseram técnicas para determinar essa 'ordem-ótima' (Akaike, 1969; Kitney, Talhami and Giddens, 1986). Nossa experiência mostrou pouca diferença nos estimadores AR de espectros individuais obtidos com diferentes ordens a partir de um valor em torno de  $p=11$ , o que se traduz na pequena diferença visual nos sonogramas (fig.10b e 10c), de modo que, nesta primeira implementação, o sistema foi programado segundo um modelo de ordem fixa  $p=20$  escolhida arbitrariamente. O problema da 'ordem-ótima' para sinais Doppler merece estudo subsequente.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da UFRJ e do CNPq e a Martin Warriner pela ajuda com os gráficos.

#### REFERENCIAS

- AKAIKE, H. (1969), Fitting Autoregressive Models for Prediction. Ann. Inst. Stat. Math. vol.21, 243-247.
- ARTS, M.G.J. and ROEVROS, J.M.J.G. (1972), On the Instantaneous Measurement of Blood Flow by Ultrasonic Means, Med. Biol. Eng., vol.10, 23-34.
- BINGHAM, C., GODFREY, M.D. and TUKEY, J.W (1967), Modern Techniques of Power Spectrum Estimation. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol-AU-15, n.2, 56-66.
- BLACKMAN, R.B. and TUKEY, J.W. (1958), The Measurement of Power Spectra - From the Point of view of Communications Engineering, Dover Publications Inc., New York.
- BOX, G.E.P., and JENKINS, G.M. (1976), Time Series Analysis Forecasting and Control. Holden-Day, Oakland, California.
- BRIGHAM, E.O. (1974), The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- BRODY, W.R. and MEINDL, J. (1974), Theoretical Analysis of the CW Doppler Ultrasonic Flowmeter, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol.21, N.3, 183-192.
- BRUM, O.F., COOPER, D.M., GROSHAR, D., ANDRADE, S.S.N., DE BRITO, C.J. e ARRUDA, S. (1980), Revista Brasileira de Clínica e Terapêutica, vol. IX, ed. supl.







