

## RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS IMPONDO RESTRIÇÃO DE RUGOSIDADE NAS PROJEÇÕES.

por

S.S. FURUIE<sup>1</sup> e N.D.A. MASCARENHAS<sup>2</sup>

**RESUMO**-- O presente trabalho propõe, na reconstrução tomográfica de imagens, uma técnica otimizada para a incorporação da restrição de rugosidade nas projeções ruidosas. Esta técnica se aplica a todo processo de reconstrução onde a natureza do sinal e do ruído permite o processamento das projeções antes da reconstrução, como é o caso da tomografia por emissão com ruído Poisson. A abordagem consiste, basicamente, na filtragem ótima das projeções minimizando conjuntamente o erro de estimação e a rugosidade na estimativa. Foram realizadas comparações qualitativas e quantitativas com métodos clássicos como a Filtragem-Retroprojeção (FRP), e o método estatístico e iterativo Estimation-Maximization (ML-EM). Mostra-se que o método proposto produz resultados comparáveis ao ML-EM porém com custo computacional bem menor (1 a 2 ordens de grandeza). Palavras chaves: teoria da estimação, rugosidade, tomografia

### INTRODUÇÃO

A tomografia computadorizada (CT) tem sido aplicada em diversas áreas, envolvendo desde dimensões moleculares em microscopia eletrônica, a dimensões cósmicas em rádio astronomia (Herman, 1980). A capacidade de visualizar estruturas internas, como a secção transversal do corpo humano, transformou o CT em um instrumento inestimável para a medicina. No entanto, os métodos tradicionais (métodos da Transformada) não apresentam bons resultados para projeções ruidosas como as encontradas em PET (Positron Emission Tomography) e SPECT (Single Photon Emission Computerized Tomography) com baixa contagem. O método estatístico Maximum Likelihood/Expectation-Maximization (ML-EM) consegue melhores resultados (Vardi, 1985), pois incorpora o ruído Poisson no seu modelo, sendo contudo muito lento ( método iterativo).

O presente trabalho propõe, na reconstrução tomográfica de imagens, uma técnica

<sup>1</sup>-Eng.(MSc,D.Eng.) da Divisão de Informática-INCOR/HCFMUSP2

<sup>2</sup>-Pesquisador Senior (Eng,MSc,PhD) do Depto Proc.Imagens-INPE=

otimizada para a incorporação da restrição de rugosidade nas projeções ruidosas. Esta técnica se aplica a todo processo de reconstrução onde a natureza do sinal e do ruído permite o processamento das projeções antes da reconstrução, como é o caso da tomografia por emissão com ruído Poisson (Furuie, 1989).

### MÉTODOS

A abordagem consiste, basicamente, na filtragem ótima das projeções, minimizando conjuntamente o erro de estimação e a rugosidade na estimativa.

#### Modelo

Assume-se que o modelo da formação das projeções e do ruído, ou o equivalente, pode ser representado pela figura 1.

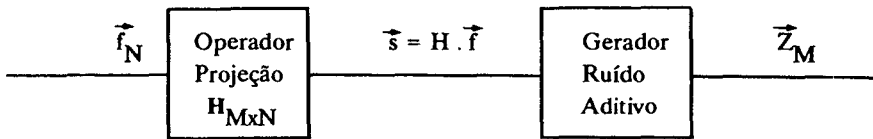


Figura 1. Modelo estatístico equivalente da formação das projeções e do ruído.

#### Minimização de função custo (rugosidade)

O problema, basicamente, é estimar  $\vec{s}$  dado  $\vec{Z}$  (figura 1) onde o ruído é aditivo e independente do sinal. Se o ruído for Poisson, pode-se aplicar a transformação de Anscombe (1948), tornando-o aditivo.

Incorporando a informação a priori de que as projeções não tem variações bruscas de intensidade (suavidade) e que desejamos uma solução que minimize o erro médio quadrático, tem-se:

$$\text{custo}(\vec{s}) = ||\vec{v}\|^2_{\text{cov}(\vec{V})} + |\beta| \cdot ||L\vec{s}\|^2 \tag{1}$$

onde  $\vec{v} = \vec{Z} - \vec{s}$  (ruído)

L operador Laplaciano definido por

$$(L\vec{s})_i = s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1} \quad i = 2, M-1 \tag{2}$$

$\beta$  : peso

$$||\vec{v}\|_{\text{cov}(\vec{v})}^2 = \vec{v}^T \cdot \text{Cov}^{-1}(\vec{v}) \cdot \vec{v} \quad \text{: quadrado da norma do erro normalizado} \quad (3)$$

Simplificando, pode-se assumir  $\text{cov}(\vec{v}) = I$  (ruído não-correlacionado), donde:

$$||\vec{v}\|_{\text{cov}(\vec{v})}^2 = \vec{v}^T \cdot \vec{v} = (\vec{z} - \vec{s})^T (\vec{z} - \vec{s})$$

Nestas condições o custo é:

$$\text{custo}(\vec{s}) = \sum_{i=1}^M (z_i - s_i)^2 + \beta \cdot \sum_{i=2}^{M-1} (s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1})^2 \quad (4)$$

derivando em relação a  $s_k$  e igualando a zero (minimização), tem-se:

$$s_k + \beta \cdot (s_{k-2} - 4s_{k-1} + 6s_k - 4s_{k+1} + s_{k+2}) = z_k \quad k=2, M-1 \quad (5)$$

Aplicando-se a transformada Z,  
 onde  $T$  : distancia amostral,  
 $w = 2 f \pi$   
 $f$ : variável no domínio da frequência, tem-se:

$$S(w) = Z(w) / [1 + \beta (2\cos 2wT - 8\cos(wT) + 6)] \quad (6)$$

o qual é um filtro recursivo de fase zero, passa-baixa. A figura 2 ilustra a resposta em frequência deste filtro para  $\beta = 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100$ . A solução deste estimador é dependente do peso dado à parcela referente à rugosidade. Para  $\beta = 0$  o sinal estimado é o próprio sinal medido e para  $\beta \rightarrow \infty$  o sinal é extremamente alisado tornando-se uma constante. Desta forma, a solução do menor custo percorre uma trajetória entre o sinal medido e o sinal fortemente alisado.

Para a implementação deste filtro pode-se utilizar o Fast Fourier Transform (FFT) unidimensional para obter-se  $Z(w)$  e, posteriormente, a FFT inversa. Para a escolha do  $\beta$ , um critério alternativo (Katsaggelos, 1989) é impor que a contribuição das duas parcelas da equação (1) sejam equivalentes. Dessa forma,

$$\beta \cong ||\vec{v}\|^2 / ||L\vec{s}\|^2$$

e o cálculo de  $\beta$  depende de conhecimentos a priori sobre o sinal original  $\vec{s}$ . Assumindo que a norma da rugosidade tolerada para  $\vec{s}$  é igual à norma do erro da estimativa, tem-se  $\beta = 1$ .

## Reconstrução

Se as projeções puderem ser consideradas transformadas de Radon da imagem a ser reconstruída, pode-se utilizar os métodos da transformada para a reconstrução, em especial a aplicação Direta da Transformada de Fourier (DTF) pelo fato desta ser mais rápida do que a Filtragem-Retroprojeção (FRP), e apresentar bons resultados. O DTF consiste na aplicação direta do teorema da projeção (Lewitt, 1983) obtendo-se a imagem no domínio da frequência e a subsequente transformada inversa de Fourier bidimensional.

Os resultados foram comparados com a Filtragem-Retroprojeção (FRP) simples sem estimação e o Expectation-Maximization (EM). A FRP (Lewitt, 1983) consiste na filtragem (no domínio da frequência) dos dados de cada ângulo de projeção seguida da retroprojeção. O EM (Vardi, 1985) é um algoritmo iterativo que busca maximizar a função verossimilhança das projeções observadas (probabilidade condicional para se obter as projeções observadas dada a imagem original), levando-se em conta que o processo é Poisson.

## RESULTADOS

O método foi testado sobre objetos simulados formados por 64 x 64 pixels (figura 3a), com total de 200000 contagens. A figura 3b mostra as projeções (sinograma) para 100 ângulos igualmente espaçados entre 90 e 270 graus, com 64 amostras por projeção, onde o processo Poisson foi considerado com valor esperado igual ao valor ideal calculado para cada projeção. Nota-se que há 200000/100=2000 contagens por ângulo de projeção, distribuídos em 64 pontos de amostra, resultando em baixos valores do valor esperado que agrava a qualidade do sinal, uma vez que em processos Poisson a variância é igual ao valor esperado.

A figura 4 ilustra a reconstrução obtida usando a Filtragem-Retroprojeção com filtro tipo rampa, enquanto a figura 5 mostra o resultado empregando-se o método proposto (Transformação de Anscombe sobre as projeções seguida de estimação do menor custo ( $\beta = 1$ ), transformação inversa de Anscombe e reconstrução pela FRP com rampa). O sinograma correspondente está na figura 6. A figura 7 mostra o melhor resultado do método EM sobre o sinograma da figura 3.b, que no presente caso correspondeu a 10 iterações.

A tabela 1 resume as medidas quantitativas sobre cada abordagem, onde REMQN corresponde à raiz quadrada do erro médio quadrático normalizado. Especificamente sendo  $\hat{f}$  a imagem original e  $\hat{\hat{f}}$  a imagem reconstruída, define-se:

$$\text{REMQN} = \sqrt{\frac{\sum (f_j - \hat{\hat{f}}_j)^2}{\sum f_j^2}}$$

O equipamento utilizado foi um microcomputador compatível com IBM PC-AT, a 6MHz, com coprocessador aritmético.

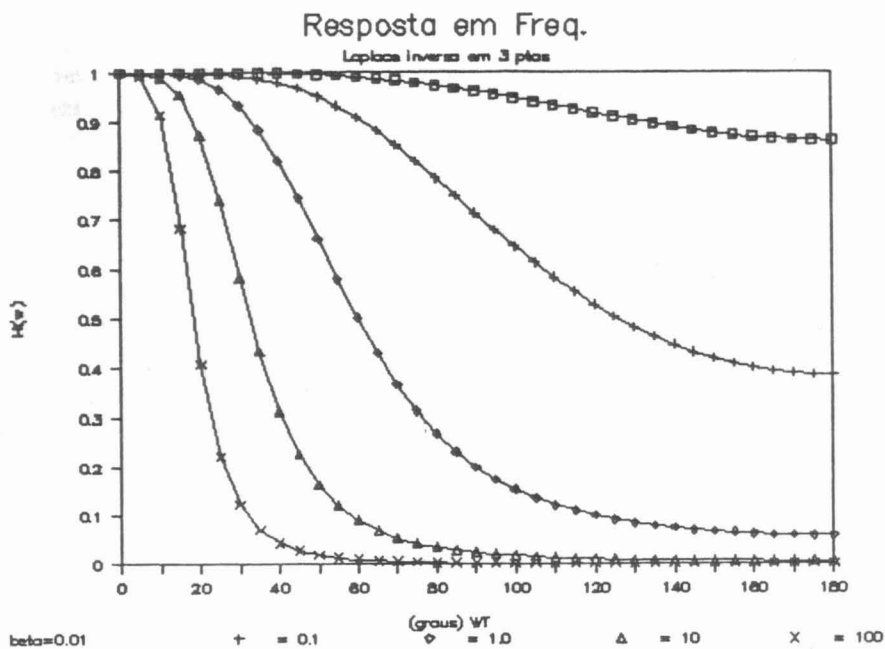


Figura 2. Resposta em frequência do filtro de menor custo para diferentes  $\beta = 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100$ .

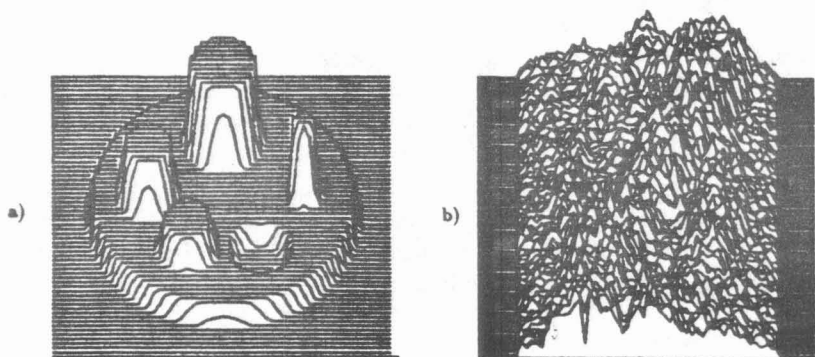


Figura 3. a) Objeto original com  $64 \times 64$  pixels ; b) projeções p/ 100 ângulos igualmente espaçados entre 90 e 270 graus (sinograma) já com ruído Poisson, com 64 amostras/ângulo.

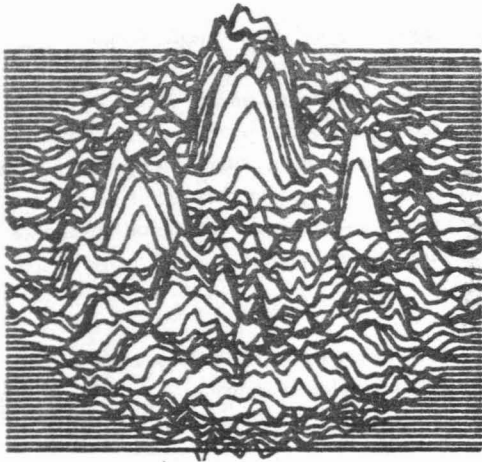


Figura 4. Imagem reconstruída pelo método da Filtragem-Retroprojeção

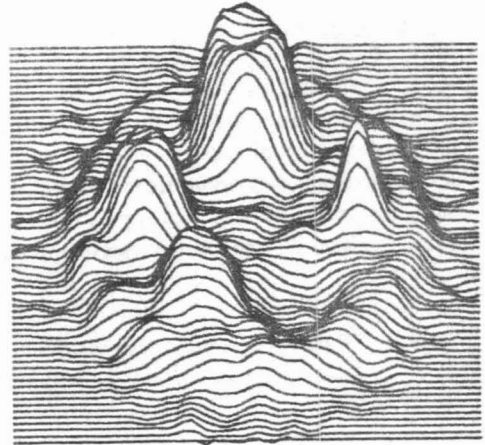


Figura 5. Imagem reconstruída pelo método proposto.

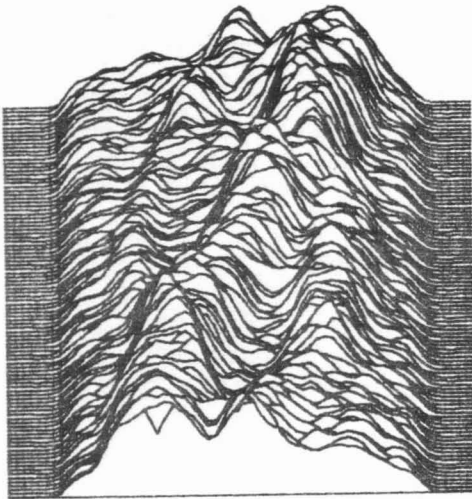


Figura 6. Sinograma estimada

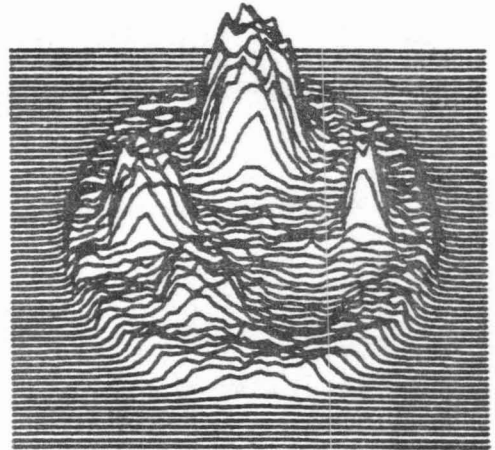


Figura 7. Imagem reconstruída pelo método EM em 10 iterações.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho mostrou-se que os métodos da transformada aliados ao pré-processamento adequado das projeções têm bom desempenho em termos de qualidade e velocidade na reconstrução de imagens, cujas projeções possam ser consideradas aproximações da transformada de Radon. Especificamente, a estimativa das projeções pela técnica do menor custo, antes da reconstrução pela Filtragem-retroprojeção (rampa) apresenta resultados comparáveis ao do EM, porém com tempo de processamento bem menor.

Tabela 1 Tabela comparativa de desempenho da reconstrução em termos da raiz quadrada do erro médio quadrático normalizado REMQN e do tempo de processamento .

	REMQN global	Tempo p/reconstrução
FRP(rampa)	0.2132	5min54s
Proposto	0.1951	7min12s
EM(10 iter)	0.1885	481min16s

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio recebido do FINEP, CNPq e INCOR

## REFERÊNCIAS

- ANSCOMBE, F.J. The transformation of Poisson binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, Cambridge, UK,35:246-54, 1948.
- FURUIE, S.S. Tomografia em imagens com ruído Poisson: pre-processamento das projeções. *Revista Brasileira de Engenharia*, Caderno de Engenharia Biomédica, São Paulo, 6(2):1-7, Setembro de 1989.
- HERMAN, G.T. *Image reconstruction from projections: the fundamentals of computerized tomography*. New York, Academic Press, 1980. 316p.
- KATSAGGELOS, A.K. Iterative image restoration algorithms. *Optical Engineering*, 28(7):735-748, July 1989.
- LEWITT, R.M. Reconstruction algorithms: transform methods. *Proceedings of the IEEE*, New York, 71(3): 390-408, Mar. 1983.

- TANAKA, E. A fast reconstruction algorithm for stationary positron emission tomography based on a modified E.M. algorithm. IEEE Transactions on Medical Imaging, New York, 6(2): 98-105, June 1987.
- VARDI, Y.; SHEPP, L.A.; KAUFMAN, L. A statistical model for positron emission tomography. Journal of American Statistical Association, Boston, 80(389): 8-37, Mar. 1985.

### **TOMOGRAPHIC RECONSTRUCTION OF IMAGES USING PROJECTION ROUGHNESS CONSTRAINT**

**ABSTRACT** –This work presents an alternative approach in order to reconstruct images with poor signal-to-noise ratio. Basically it consists of estimating projections taking into account that the projection roughness is low. An optimum filter is developed considering a cost function that incorporates estimation error and projection roughness. This technique can be applied to reconstruction process where the nature of the signal and noise allows projection processing before reconstruction. These filtered projections are used to reconstruct the original image applying transform methods (direct Fourier Transform method and Filtering Backprojection). This approach is compared with simple Filtering-Backprojection and Maximum Likelihood implemented by the Expectation-Maximization algorithm (ML-EM). It is shown that the proposed method yields similar results compared with ML-EM but with much less processing time(1 to 2 orders).

**Keywords:** Estimation theory ,roughness, Tomography